

空间小推力轨道最优Bang-Bang控制的两类延拓解法综述

朱政帆¹, 高扬^{2*}

(1. 中国科学院 光电研究院, 北京 100094; 2. 中国科学院 空间应用工程与技术中心, 北京 100094)

摘要: 介绍了空间小推力轨道优化问题中的最优Bang-Bang控制问题, 对两类延拓解法给出了描述: 第一类解法首先求解能量最优解, 然后采用能量-燃耗同伦得到最优Bang-Bang控制; 第二类解法引入推力开关切换准则, 以双脉冲解作为初解, 通过参数延拓得到最优Bang-Bang控制。对两类延拓解法进行了比较, 指出了各自的优势与特点。对延拓方法应用于求解更加复杂的小推力轨道设计问题进行了展望, 提出了包含初解、延拓与拼接三要素的人工智能轨道优化概念。

关键词: 小推力轨道; 数值优化; Bang-Bang控制; 同伦延拓; 人工智能

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2017)02-0101-10

DOI: 10.15982/j.issn.2095-7777.2017.02.001

引用格式: 朱政帆, 高扬. 空间小推力轨道最优Bang-Bang控制的两类延拓解法综述[J]. 深空探测学报, 2017, 4(2): 101-110.

Reference format: Zhu Z F, Gao Y. Survey of two classes of continuation methods for solving optimal Bang-Bang control of Low-Thrust space trajectories [J]. Journal of Deep Space Exploration, 2017, 4(2): 101-110.

0 引言

随着空间电推进技术应用于航天器轨道机动, 小推力轨道优化问题成为航天飞行动力学研究的一个重要方向^[1-2]。对于任意的航天器变轨方案, 燃料消耗始终是一个核心指标。此外, 小推力控制从最初的地面优化设计, 发展到目前所需的星载自主控制律, 不断追求自主性、稳定性、最优性等基本性能指标。虽然小推力空间轨道设计问题越来越复杂, 但均可认为复杂轨道由若干小推力转移轨道段拼接而成, 而每一个小推力转移轨道段的优化设计问题可以描述如下: 给定初始与末端轨道状态以及转移时间, 求解燃耗最省转移轨道的最优控制策略。考虑小推力发动机推力幅值受限的情况, 利用最优控制理论可以推导出推力控制的最优性一阶必要条件, 其中Bang-Bang控制是必要条件之一, 即推力幅值或取最大值或为零^[3]。Bang-Bang控制在开关切换时刻推力幅值不连续, 而且事先并不知道推进段数目, 也不知晓开关时刻, 故求解Bang-Bang控制是小推力转移轨道优化问题的主要难点。

在过去的20年, 小推力轨道优化设计方法研究可谓百花齐放、百家争鸣, 总结起来主要可以分为间接法、直接法和混合法。间接法利用庞特里亚金极小值

原理引入协态变量微分方程, 推导出最优性必要条件(包括决定推力幅值的开关函数), 将轨道优化问题转化为非线性常微分方程的边值问题, 满足边值约束的解即为最优解, 无需对指标函数(如燃耗最省等)直接寻优。直接法的主要思想是将轨道状态和推力控制变量离散化, 状态和控制变量的时间函数通过若干离散节点的插值得到, 直接法将最优控制问题转化为标准的非线性参数优化问题, 通过迭代离散点的值使得目标函数最优并且满足约束条件, 目前已有较为成熟的软件包求解此类问题^[4-7]。混合法(间接法与直接法的混合)的基本思路与直接法相似, 也是将最优控制问题最终转化为参数优化问题, 也可以利用较为成熟的软件包求解。混合法利用协态变量微分方程以及求解最优控制的解析形式或近似解析形式, 避免将连续时间控制变量完全离散化。关于优化方法的综述文章可参见文献[8~11], 然而并没有哪一种方法能够完美地解决所有问题。间接法中协态变量没有物理意义且相对于边值约束非常敏感, 协态变量初值猜测很难给定, 从而难以收敛到最优解; 直接法不采用协态变量方程, 参数优化问题较容易收敛到可行解, 但其最优性一般难以保证; 混合法则介于间接法与直接法之

收稿日期: 2017-01-10 修回日期: 2017-03-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372311); 中国科学院空间科学研究院培育项目; 中国科学院国防科技创新基金项目(CXJJ-15M016)

间, 协态变量初值迭代收敛性优于间接法, 解的最优性优于直接法。采用直接法或混合法, 虽然均可设法得到Bang-Bang控制方案, 但一般均不满足最优性必要条件。

迄今为止, 求解最优Bang-Bang控制的方法主要是延拓方法(也称为同伦方法、平滑方法等)。延拓方法利用相关参数构造出简单问题与复杂问题的联系, 首先设法求解简单问题, 然后通过参数逐步改进最终得到复杂问题的解。求解最优Bang-Bang控制被认为是复杂问题, 因此简单问题和延拓参数成为延拓方法的两个主要因素。本文以二体模型下的转移轨道为例介绍两类延拓方法。第2节将简要介绍小推力轨道优化问题, 并对Bang-Bang控制求解方法进行评述; 第3、4节分别描述了两类延拓方法; 第5节对比了两类解法, 指出各自的优势与特点; 第6节描述了延拓方法的应用展望; 第7节为本文总结。

1 小推力轨道优化问题与Bang-Bang控制求解方法

在单一引力场中(例如以太阳或者地球为中心)且不考虑摄动影响, 航天器动力学方程如下

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \frac{F}{m}\boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

$$\dot{m} = -\frac{F}{g_e I_{sp}} \quad (3)$$

其中: \mathbf{r} 为的航天器的位移矢量, $r = \|\mathbf{r}\|$; \mathbf{v} 为航天器的速度矢量; μ 为中心天体引力常数; F 为推力幅值; m 为航天器质量; $\boldsymbol{\alpha}$ 为推力方向; $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$; g_e 为地球水平面重力加速度($g_e = 9.806\ 65\ \text{m/s}^2$); I_{sp} 为比冲。对于小推力轨道, 推力幅值 F 存在最大值, 即 $0 \leq F \leq F_{\max}$ 。对于脉冲转移轨道, 近似认为推力 F 无穷大, 即航天器在发动机开启瞬时获得一个速度增量, 实现轨道转移, 其作用时间可以忽略不计。

航天器转移轨道的最优控制问题可以描述如下: 给定航天器在初始时刻 t_0 的轨道状态 $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$ 和质量 m_0 , 要求航天器在末端时刻 t_f 转移至目标轨道状态 $[\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f]$, 寻找最优推力方向和大小, 在保证约束的条件下使燃料消耗最少, 性能指标可以表示为

$$J = \min[-m(t_f)] \quad (4)$$

已知航天器初始轨道状态 $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$, 可通过微分方程(1)和(2)积分求得末端时刻的位置矢量 $\mathbf{r}(t_f)$ 和速度矢量 $\mathbf{v}(t_f)$, 末端约束条件为

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) \\ \mathbf{v}(t_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}_f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

依据最优控制理论^[3], 可以构造系统的哈密尔顿函数

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \dot{\mathbf{v}} + \lambda_m \dot{m} \quad (6)$$

其中: $\boldsymbol{\lambda}_r$ 为位置矢量 \mathbf{r} 对应的协态变量; $\boldsymbol{\lambda}_v$ 为速度矢量 \mathbf{v} 对应的协态变量; λ_m 为质量 m 对应的协态变量。协态变量的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu}{r^5}\mathbf{r}\mathbf{r}^T\boldsymbol{\lambda}_v \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\boldsymbol{\lambda}_r \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{F}{m^2}\boldsymbol{\lambda}_v^T\boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

由于末端质量 $m(t_f)$ 并无约束, 并且性能指标与之相关, 协态变量 λ_m 在末端时刻 t_f 的值为

$$\lambda_m(t_f) = \frac{\partial J}{\partial m(t_f)} = -1 \quad (10)$$

依据庞特里亚金极小值原理^[12], 最优推力方向 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 应满足 $\partial H/\partial \boldsymbol{\alpha}^* = 0$, 并且对于任意推力方向均满足 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$, 可推导出最优推力方向

$$\boldsymbol{\alpha}^* = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|} \quad (11)$$

由于哈密尔顿函数与推力幅值 F 为线性关系, 可推导出最优推力幅值应满足Bang-Bang控制

$$\begin{cases} F = 0 & \text{if } S > 0 \\ F = F_{\max} & \text{if } S < 0 \\ 0 < F < F_{\max} & \text{if } S = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$S = \frac{\partial H}{\partial F} = \boldsymbol{\lambda}_v^T \frac{1}{m}\boldsymbol{\alpha}^* - \frac{\lambda_m}{g_e I_{sp}} = -\frac{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|}{m} - \frac{\lambda_m}{g_e I_{sp}} \quad (13)$$

其中 S 为Bang-Bang控制的开关函数, 暂不考虑 $S = 0$ 的奇异情况。最终, 最优控制问题转化为如表1所示的常微分方程两点边值问题, 式(11)~(13)为推力控制取得最优解的必要条件。由于初始时刻的协态变量($\boldsymbol{\lambda}_r(t_0)$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)$ 、 $\lambda_m(t_0)$)需要进行初值猜测, 并且转移轨道的推力开关序列无法事先给出, 该两点边值问题的求解显得非常困难。

表1 燃耗最优小推力转移轨道的两点边值问题

Table 1 Two-point boundary value problem of fuel-optimal low-thrust transfer trajectory

初始条件	动态过程	末端约束
已知量: \mathbf{r}_0 、 \mathbf{v}_0 、 m_0	式(1)~(3)	式(5)
未知量: $\boldsymbol{\lambda}_r(t_0)$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)$ 、 $\lambda_m(t_0)$	式(7)~(9)	式(10)

为了求解满足最优性必要条件的小推力转移轨道, 可以首先预设开关序列, 然后验证求解的小推力转移轨道是否满足必要条件。若不满足必要条件, 则需要对开关序列进行调整, 并且对调整后的结果再次验证, 直到求解的转移轨道满足最优性必要条件为止^[13-17]。Fowler^[18]等求得至多有一个滑行段的Bang-Bang控制轨道。Dixon^[14]提出了一种改进开关序列的方法。Bartholomew-Biggs^[16]等首先求解全程推进的小推力轨道, 然后依据开关函数不断增加滑行段, 求解出“开-关-开”和“开-关-开-关-开”序列的Bang-Bang控制(其中“开”表示推进段, “关”表示滑行段)。Chuang等通过增加飞行时间, 由少数推进段的转移轨道求得更多推进段的转移轨道, 算例中实现了由两个推进段增加到三个推进段的转变^[19-20]。这些算法总体而言需要更多人为参与, 因而计算效率不高, 目前都未成为通用方法。

另一种方法是经过分析转移轨道设计需求后设定开关序列并进行求解, 不对优化结果进行开关函数等必要条件的验证。Redding^[21-22]设计转移至太阳同步轨道的飞行轨迹时, 只在近地点和远地点附近设计推进段。Gao^[23]基于对轨道段和推力方向对轨道根数改变效率的分析预设了一个轨道周期内的开关序列规律, 用于求解多圈转移轨道, Zuiani^[24]应用类似方法实现了Bang-Bang控制轨道求解。Goodson^[19, 25]等提出将多段小推力轨道拼接起来形成具有大量开关序列的转移轨道。此类方法可以快速求解有较多开关切换的转移轨道, 但无法保证该解满足最优性必要条件。

在传统的直接法、混合法中, 将推力幅值时间函数离散化, 即可通过直接优化得到推力幅值变化曲线。由于推力幅值的变化是有梯度的, 无法得到开关瞬时切换, 即难以直接形成理想的Bang-Bang控制, 需要经过后续的分段处理。利用直接法、混合法求解Bang-Bang控制可参考文献[26~35]。另一方面, 开关函数的最优性必要条件一般不在直接法或混合法中设定, 从而在很大程度上降低了协态变量敏感性。因此, 传统的直接法或混合法失去了基于必要条件判断最优性的依据, 即使它们可以更加高效地得到可行解。

延拓方法是目前求解最优Bang-Bang控制的有效方法, 而且越来越广泛地被用于小推力转移轨道设计。本文中, 我们将已有的延拓方法分为两类: 能量-燃耗同伦方法和开关序列切换延拓方法。能量-燃耗同伦方法是指首先求解满足约束的能量最优转移轨道, 然后通过对性能指标的延拓最终求解燃耗最优转移轨道。开关序列切换延拓方法是指从一个满足Bang-Bang控制

必要条件的燃耗最优解出发, 通过参数延拓直接求解另一个满足Bang-Bang控制必要条件的燃耗最优解, 并且在延拓过程中依据开关函数变化切换开关序列。第2、3节将详细介绍这两种延拓方法。

2 第一类解法: 能量-燃耗同伦方法

求解燃耗最优的小推力轨道之所以困难, 原因在于最优控制对应的推力幅值变化不连续(Bang-Bang控制形式), 难以直接得到最优的开关序列。与燃耗最优转移轨道不同, 能量最优转移轨道对应的推力幅值随时间变化连续可导, 相较于Bang-Bang控制被认为更容易求解的一个主要依据。基于延拓方法的思想, 可以先求解简单的能量最优转移轨道, 然后通过延拓转移时间、推力幅值、引力系数、约束条件等求得复杂的能量最优转移轨道, 最后对性能指标进行延拓(能量-燃耗同伦过程)求解最优Bang-Bang控制。Bertrand^[36]利用能量-燃料同伦方法求解了最优Bang-Bang控制问题。Haberkron^[37]应用始端轨道根数延拓求得能量最优轨道, 而后应用性能指标延拓得到最小燃耗转移轨道。Gergaud^[38]对文献[37]中的方法进行了更为严密的论证, 并且提出在转移时间没有限制的条件下不断增加转移圈数, Bang-Bang控制小推力轨道最终接近于脉冲转移轨道^[39]。Martinon^[40]提出在此同伦方法的积分中加入开关检测, 提高了打靶法的计算效率, 并且求解出具有大量开关切换的小推力轨道。

能量最优转移轨道的性能指标一般定义为

$$J = \min \left(\int_{t_0}^{t_f} u^2 dt \right) \quad (14)$$

其中 $u = F/F_{\max}$, $u \in [0, 1]$ 。此时最优控制对应的推力幅值随时间变化连续可导, 各优化算法更容易处理此类问题, 求解出满足约束的小推力转移轨道。为了解燃耗最优转移轨道, 可以将性能指标式(4)等价转化为

$$J = \min \left(\int_{t_0}^{t_f} u dt \right) \quad (15)$$

并且通过延拓参数 ε 构造新的性能指标

$$J = \min \left\{ \frac{F_{\max}}{g_c I_{sp}} \int_{t_0}^{t_f} [u - \varepsilon u(1-u)] dt \right\} \quad (16)$$

其中 $\varepsilon \in [0, 1]$ 。当 $\varepsilon = 1$ 时, 性能指标式(16)为能量最优形式; 当 $\varepsilon = 0$ 时, 性能指标式(16)为燃耗最优形式。性能指标中乘以常数 $F_{\max}/(g_c I_{sp})$ 并不改变最终寻优结果。

由于构造了新的性能指标式(16), 对应的哈密

尔顿函数为

$$H = \lambda_r^T \dot{r} + \lambda_v^T \dot{v} + \lambda_m \dot{m} + \frac{F_{\max}}{g_e I_{sp}} [u - \varepsilon u (1 - u)] \quad (17)$$

可以推导出最优推力幅值满足

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho > \varepsilon \\ \frac{\varepsilon - \rho}{2\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon \leq \rho \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } \rho < -\varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

$$\rho = 1 - \frac{g_e I_{sp} \|\lambda_v\|}{m} - \lambda_m \quad (19)$$

其中： ρ 为能量-燃料同伦过程的开关函数。在能量-燃料同伦过程中，初始时刻的状态量 $[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, m_0]$ 和协态变量 $[\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), \lambda_m(t_0)]$ 通过式(1)~(3)、式(7)~(9)积分，在积分过程中实时检测开关函数 ρ 的值，并且依据式(18)设定推力幅值，采用优化算法(例如打靶法)满足末端时刻约束条件式(5)和式(10)。将能量最优小推力转移轨道作为延拓过程的初始解($\varepsilon = 1$)，逐步减小延拓参数 ε 进行迭代优化，将上一次优化结果作为下一次优化的初值，最终求得燃料最优的小推力转移轨道。从能量最优延拓至燃料最优的过程中，由于数值积分过程内嵌了开关检测，保证了最终的Bang-Bang控制满足一阶必要条件。图1为能量-燃料同伦方法延拓过程中推力幅值的变化示意图，当 $\varepsilon = 1$ 时推力幅值随时间变化为一条连续可导的曲线，随着延拓系数 ε 不断增加，推力幅值不断接近Bang-Bang控制形式；当 $\varepsilon = 0$ 时推力幅值为标准的Bang-Bang控制形式。

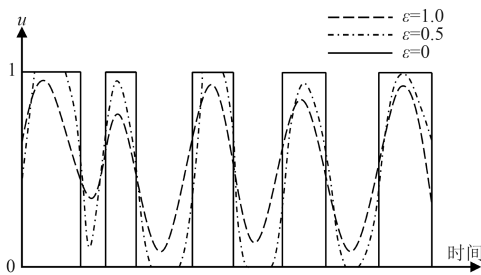


图1 能量-燃料同伦方法延拓过程推力幅值变化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of thrust-amplitude variation in the continuation process of energy-fuel homotopy

自2008年以来，能量-燃料同伦方法得到了广泛的应用^[41-57]。Petukhov提出了末端条件延拓和引力常数延拓两种延拓方法求解能量最优轨道的方法^[41]，而后通过在开关函数中构造延拓变量的方法得出燃料最优轨道^[42]。Caillau^[43-44]利用能量-燃料同伦法求解圆形限制性三体模型下的最优Bang-Bang控制转移轨道。Olympio^[45]、Guo等^[46-47]和Jiang等^[48]采用能量-燃料同伦方法的同时，考虑了引力辅助的情况。Li等^[49]实现了相对运动

模型下的燃料最优的Bang-Bang控制轨道求解，并给出了相对运动模型下能量最优转移轨道的协态变量近似解析形式。Tarzi等^[50]将延拓方法与轨道平均技术相结合，先用延拓方法求解协态变量初值，然后通过能量-燃料同伦方法求得多圈转移轨道，同时考虑了太阳光压、地影、近地点等约束。Zhang^[51]采用能量-燃料同伦求解“日-地-月-航天器”四体模型下的小推力轨道。Chen等^[52]也通过能量-燃料同伦法设计出通过两次火星借力转移至主带小行星的转移轨迹。Zhang等^[53]考虑了能量约束和太阳能帆板效率下降情况下燃料最优转移轨道。Zhang等^[54-55]在限制性三体模型下先通过推力幅值延拓求解出能量最优转移轨道，再通过延拓性能指标求得上百圈的燃料最优转移轨道。陆毅^[56]在第届全国空间轨道设计竞赛中实现了载人小行星探测的Bang-Bang控制轨道设计。黄岸毅^[57]等人在全局轨迹优化竞赛中采用此方法完成了连续交会小行星的任务设计。虽然能量最优转移轨道收敛域更大，但对于推力取常值的问题，能量最优解只是一个中间解，推力幅值随时间变化，无法成为常值推力转移轨道的可行解。

3 第二类解法：开关序列切换延拓方法

开关序列切换延拓方法是基于混合法提出的一种参数延拓方法，主要为了弥补原方法中预先猜测开关序列的不足(预先猜测的开关序列可能不是最优方案)。该方法源于通过推力幅值延拓求解满足Bang-Bang控制的小推力轨道^[58]。对于第2节中的两点边值问题，存在一条燃料最优全程推进的最小推力轨道($F = F_{\min}$)，推力方向满足式(11)，开关函数满足 $S \leq 0$ 。当推力幅值增加时($F > F_{\min}$)，转移轨道出现滑行段，可以求得满足Bang-Bang控制的小推力轨道。当推力幅值继续增加至 $F \rightarrow +\infty$ 时，推进段时间可以忽略不计进而采用脉冲代替，此时开关函数满足 $S \geq 0$ ，并且仅在脉冲时刻有 $S = 0$ 。图2为不同推力幅值对应的开关函数曲线示意图。受到图2的启发，满足Bang-Bang控制的小推力轨道可以通过全程推进的最小推力轨道延拓推力幅值求解。

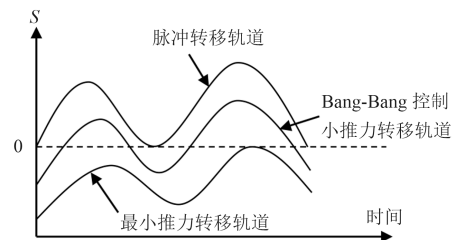


图2 不同推力幅值开关函数示意图

Fig. 2 Schematic diagram of switching function with respect to different thrust amplitude

为了求解最小推力转移轨道，首先以兰伯特算法^[60]求解的两脉冲转移轨道作为两点边值问题的初值，然后优化求解具有“开-关-开”序列的小推力轨道。随着推力幅值不断降低，推进时间不断增加，可以求解出全程推进的最小推力轨道 ($F = F_{\min}$)。这一延拓步骤得到的最小推力转移轨道无需为协态变量提供初值^[63]。Shen在文献[64~66]中分别给出了二体模型和三体模型下脉冲转移轨道的初值猜测方法，但文献中初值猜测方法提供的协态变量初值并不是原始最优控制问题的初值，而是辅助最优控制问题的初值，然后通过对性能指标数值延拓求解原始最优控制问题的协态变量，并且此方法是否适用于小推力轨道也有待进一步讨论。

以最小推力转移轨道为起始解，推力幅值增加一个小量 δF ($F = F_{\min} + \delta F$ ，记为 F_0 ，其中 $\delta F > 0$)，转移轨道出现滑行段 ($S > 0$)，可求得满足Bang-Bang控制的小推力转移轨道。接下来延拓推力幅值，延拓策略如下：

$$F_{n+1} = (1 + c) F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

其中： c 为延拓步长系数，并且 $c > 0$ ，并可采用适当的自适应策略选取。采用如表 2所示的非线性参数优化模型NLP (Nonlinear Programming) 求解推力幅值为 F_{n+1} 的小推力转移轨道。表 2中 t_i 为开关切换时刻，由式 (12) 可知应满足约束条件 $S(t_i) = 0$ 。 F_n 最优解作为NLP中优化参数的初值，由初始状态 $[r_0, v_0, m_0]$ 和协态变量 $[\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0)]$ 通过式 (1) ~ (3) 和式 (7) ~ (8) 积分求得末端时刻轨道状态 $[r(t_f), v(t_f)]$ ，并要求满足等式约束。协态变量 λ_m 可由式 (9) 和 (10) 从 t_f 向 t_0 积分，并计算开关函数式 (13)。

表 2 NLP: Bang-Bang控制小推力轨道优化模型

Table 2 NLP: the optimization model of low-thrust trajectory with Bang-Bang control

优化参数	性能指标	等式约束
$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), t_i$	$\min[-m(t_f)]$	$r(t_f) = r_f, v(t_f) = v_f, S(t_i) = 0$

若NLP不收敛，则减小延拓步长 c ，直至NLP收敛为止；若NLP收敛，并且 F_{n+1} 收敛解满足式 (12)，则收敛解为 F_{n+1} 的燃耗最优解，满足Bang-Bang控制必要条件，若 F_{n+1} 收敛解不满足式 (12)，则表明收敛解不是 F_{n+1} 的燃耗最优解，开关序列需要切换以满足Bang-Bang控制必要条件。开关序列的切换规则与开关函数 S 中四类特征值有关：局部极大值 S_U 、局部极小值 S_L 、初始值 $S(t_0)$ 和末端值 $S(t_f)$ ，如图 3所示。通过比较 F_{n+1} 收敛解和 F_n 最优解，如果某特征值在优化前后的正负号发生改变，则表明开关序列需要切换。开关

序列切换准则如表 3所示。当推力幅值延拓至目标推力幅值时延拓停止，最终求得满足Bang-Bang控制必要条件的小推力转移轨道。

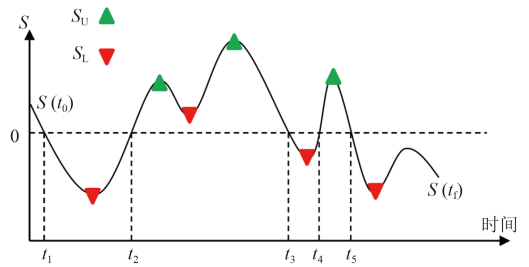


图 3 开关函数特征值示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the characteristic values of the switching function

表 3 开关序列切换准则

特征值	特征值变化	重置开关序列
S_U	N→P	增加滑行段
	P→N	减少滑行段
S_L	N→P	减少推进段
	P→N	增加推进段
$S(t_0)$	P→N且 $\dot{S}(t_0) > 0$	增加推进段
	P→N且 $\dot{S}(t_0) < 0$	减少滑行段
	N→P且 $\dot{S}(t_0) > 0$	减少推进段
	N→P且 $\dot{S}(t_0) < 0$	增加滑行段
$S(t_f)$	P→N且 $\dot{S}(t_0) > 0$	减少滑行段
	P→N且 $\dot{S}(t_0) < 0$	增加推进段
	N→P且 $\dot{S}(t_0) > 0$	增加滑行段
	N→P且 $\dot{S}(t_0) < 0$	减少推进段

注：N表示负数，P表示正数

推力幅值延拓只是开关序列切换延拓方法的一个示例，延拓参数还可选取转移时间、相位角等。开关序列切换延拓方法的思路为：从一个满足Bang-Bang控制必要条件的小推力转移轨道出发，通过参数延拓直接求解另一满足Bang-Bang控制必要条件的小推力转移轨道，在延拓的过程中跟踪开关函数变化，并依据表 3中的准则切换开关序列。推力幅值延拓过程可视为：已知 $F = F_{\min}$ 的燃耗最优小推力轨道满足Bang-Bang控制必要条件，通过延拓推力幅值，求解出目标推力幅值的燃耗最优小推力轨道。此方法不再利用能量最优解作为一个中间过渡而直接进行参数延拓，并且延拓过程检测开关函数后再设定开关序列。若采用推力幅值延拓方法进行大规模的优化，在延拓过程中严格满足最优性一阶必要条件将影响计算效率，可以考虑适当放宽约束条件，快速求得次优解以利于全局寻优，相关内容有待进一步研究。

朱小龙等^[58]利用推力幅值延拓求解相对运动线性化模型下满足Bang-Bang控制的小推力转移轨道和多脉

冲转移轨道，并且提出了临界推力的概念。所谓临界推力是指使得开关函数部分特征值为零对应的推力，此时开关序列奇异，出现某个瞬时的开关序列既可以是“开”也可以是“关”。Chuang等也在求解Bang-Bang控制时发现了此现象，但没有进行分析讨论^[19]。随后，朱小龙等通过延拓方法求解了月面转移的“开-关-开”推力序列的燃耗最优轨迹^[59]。朱政帆利用该方法求解了卫星编队重构的最优控制问题（第届全国空间轨道设计竞赛乙组题目）^[61]，利用状态变量方程与协态变量方程解耦的特性实现了相对运动模型中的多圈转移轨道设计。孟雅哲^[62]将相对运动方程拓展到二体模型采用无奇异轨道根数模型求解最优Bang-Bang控制的两点边值问题，利用推力幅值延拓能够求解不同开关序列的小推力轨道。朱政帆等^[63]开展了进一步的深入研究，一方面对延拓参数为转移时间和末端相位角的情况进行了探讨，给出了更多的算例，而且算例表明延拓参数存在极限值，开关序列相应地从存在“开”和“关”的Bang-Bang控制通过延拓切换序列最终为全程推进；另一方面，从不同两脉冲解出发（飞行圈数不同，但对应同一个问题），针对同一个两点边值问题求解出不同的Bang-Bang控制小推力轨道，且均满足最优性必要条件。

4 两类延拓解法之比较

简而言之，两类解法均以参数延拓为基础。第一类解法首先求解能量最优解，然后采用能量-燃料同伦得到最优Bang-Bang控制；第二类解法则引入推力开关切换准则，从双脉冲解开始通过参数延拓最终得到最优Bang-Bang控制。通过进一步分析，两类解法之比较可以体现在以下几个方面。

1) 第一类解法已被应用于多种小推力转移轨道问题的求解，包括中途约束^[46-48]与多圈转移轨道（包括限制性三体模型中的上百圈转移轨道）^[50-55]。第二类方法还没有证明有同样的能力，目前仅求解了相对运动模型与二体模型转移轨道，且转移圈数较少（十几圈的量级^[63]）。对于线性化相对运动模型，能量最优解可以解析得出^[49]，因而第一类解法计算效率更高。

2) 对于二体模型转移轨道，在协态变量初值猜测方面，第一类解法在求解相对简单的能量最优轨道时仍需猜测协态变量初值。第二类解法则可从双脉冲解（由兰伯特算法求得）开始通过推力幅值延拓得到最小推力全程推进解（满足最优性必要条件）以及Bang-Bang控制最优解，这样可以无需提供协态变量初值。

3) 若转移轨道问题（二体模型转移轨道）的系统

参数发生变化（如转移时间、推力幅值、目标轨道相位角等），第一类解法需重新计算对应的能量最优解（可利用已有能量最优解作为初解通过参数延拓求得），然后再实施能量-燃料同伦过程得到Bang-Bang控制最优解。对于第二类解法，采用已有Bang-Bang控制最优解作为初解，直接延拓变化参数即可得到新的Bang-Bang控制最优解。相对之下，第二类解法无需求解能量最优解，因而计算效率更高。

4) 第二类解法可以找出延拓参数的临界解（如推力幅值、时间、目标轨道相位角等），临界解表明开关函数或Bang-Bang最优控制具有分岔特性，成为Bang-Bang最优控制的另一种奇异状态（开关函数恒取零是已知的一种奇异状态）。第一类解法暂无策略处理此奇异现象，针对求解包含临界参数的转移轨道问题，可能会遇上迭代收敛困难的情况。

5) 第二类解法通过延拓推力幅值，最终可以求出最优脉冲转移轨道，特别是多脉冲最优解。除此之外，还有望求解脉冲与有限推力混合推进最优控制问题。第一类解法目前暂不具备该项功能，没有考虑求解最优脉冲转移轨道问题。

6) 对于同一个二体模型转移轨道问题，双脉冲解可能对应多解（通过兰伯特算法求解的多圈转移轨道具有多解特性），那么通过推力幅值延拓，即有可能得到有限推力（以及多脉冲）的多解情况。也就是说，第二类解法提供了一种得到最优多解的计算途径。第一类解法暂未涉及讨论Bang-Bang控制多解问题，也没有探讨能量最优解的多解特性。

5 延拓方法应用展望

实际上，两类延拓解法可以融为一体，延拓参数设定可以有多种不同方案，如指标参数延拓、任务参数延拓、模型参数延拓、约束条件参数延拓等，从而建立起基于延拓设计的求解空间小推力Bang-Bang控制转移轨道的优化设计方法体系。延拓方法提供了基本转移轨道问题的Bang-Bang控制局部最优解的计算途径，为进一步的转移轨道设计提供了满足最优性必要条件的最佳初解。

本节简要展望本文所述延拓方法的应用前景，问题背景包括：多目标巡游转移轨道、复杂引力场转移轨道、全局最优解与帕累托前沿解、小推力多圈转移轨道、星群编队与博弈问题、Bang-Bang制导控制律自主生成、人工智能轨道优化。

1) 对于多目标巡游探测飞行轨道，整条轨道可以分为多段基本转移轨道，中途约束表现为目标飞越、

交会、停留等。一般可以采用双脉冲轨道拼接得到整条轨道,然后通过延拓方法求解基本转移轨道(可设法实现并行计算),最后进行整体或部分轨道优化得到最终设计结果。对于整体轨道优化的中途约束,可以推导出最优性必要条件,也可以不再加以考虑,只考虑满足状态约束即可。

2) 一般而言,相对运动转移轨道(圆轨道与椭圆轨道线性化相对运动方程)最容易求解,其双脉冲或能量最优解均能解析得到;其次是二体模型转移轨道,圆形限制性三体与多体星历模型转移轨道求解则更有难度。例如,在三体模型下延拓模型参数可能出现非线性分岔,延拓方法是否需要针对分岔现象进行改进仍需要进一步探讨。如果建立模型之间的参数延拓方案,那么可以将各类模型转移轨道关联起来,即有望先求解简单模型转移轨道,然后通过延拓求解复杂引力场转移轨道问题。

3) 从多个初解出发,通过设置不同的延拓路径(或实现延拓路径的自动选择),可利用并行计算自动且更加快速地求得一系列Bang-Bang控制最优解。在给定参数及其定义域的情况下,可以通过并行计算延拓方法更高效地得到全局最优解以及帕累托前沿解,有助于任务设计者对任务参数开展折中分析(Trade Study)。

4) 当转移圈数足够多(如数百圈),Bang-Bang控制的开关切换次数非常多,转移轨道优化问题求解会变得越来越困难。多圈数转移轨道较多采用轨道平均化方法求解,得到的解由平均轨道根数表示。以平均轨道根数解为参考,通过构建多参数交叉延拓方案,有望能够进一步求解由瞬时轨道根数表示的Bang-Bang控制多圈转移问题。

5) 延拓方法对于Bang-Bang制导控制律自主生成具有潜在应用价值。当前状态偏离标称轨道,特别是线性反馈跟踪控制律失效的情况,可以利用当前或末端状态延拓的方法得到新的Bang-Bang最优控制律。该方法基于模型预测,与基于误差的反馈控制律结合在一起,有望在自主制导方面发挥更大的作用。当然,延拓方法计算效率还有待进一步提升。

6) 星群编队与博弈的小推力转移轨道主要探讨单颗卫星转移轨道局部最优解的组合方案,从而实现星群整体控制层面的最优性能指标。由于卫星数目多,直接求解多星Bang-Bang控制并不容易。可采用首先求解单星的转移轨道,设置合理可行的多参数延拓方案,即可得到一系列局部最优解,然后将多颗星的局部最优解组合为多星最优解。针对星群编队与博弈问

题,往往需要考虑计算时间约束,即在给定的计算时间内得到尽可能最优的解,这也涉及到制导控制律自动生成问题。

6 人工智能轨道优化的探讨

本文提出一个新的概念:人工智能轨道优化。这个概念是指给出复杂飞行轨道优化设计问题描述,计算机可以模拟人的思考方式自动进行优化设计。为了实现这个目标,可以将问题求解分为三个基本步骤:初解、延拓和拼接。人工智能方法也可遵循这个设计步骤,并在每一步均遵循特定的自动计算方法。

初解可以理解为最容易得到的解,可能并不满足问题约束的解,比如本文所述的能量最优解(第一类方法)与双脉冲解(第二类方法)。初解还可以有其他形式,如多脉冲解或特定推力解等。初解最好是解析形式并无需迭代,这样可以适应大范围的问题参数空间。通过并行计算可以获得大量对应不同参数的初解,并从中选取较好的局部初解。

延拓解法的基本思路是从已知解得到未知解(包括从初解开始延拓)。延拓可以提供某些系统参数在一定取值范围内的局部最优解。在这一步中,从较好的局部初解出发,通过延拓即可得到最优推力方向,包括得到Bang-Bang控制。延拓过程一般需要进行数值迭代,如何提高迭代效率值得深入研究。

将局部最优解按照时间顺序拼接起来(后者其它组合方式),即可得到更加复杂的飞行轨道。这一步骤主要关注组合优化的全局最优性,同时组合优化算法的计算效率也是值得研究的问题。在这一步使用遗传算法,可以更好地发挥算法的优势。但针对初值、延拓的计算需求,遗传算法的优势往往难以体现。

总而言之,初解、延拓与拼接的求解步骤为人工智能轨道优化提供了潜在的实现途径。与直接采用进化算法求解不同,基于初解(如双脉冲解)、延拓与拼接的思想有望让计算机更加智能化,初解选择延拓起点,延拓注重获得局部最优解,拼接注重获得全局最优。初解、延拓与拼接方案的设定可以借助机器学习的思想,通过让计算机不断求解转移轨道问题,总结规律与积累经验,从而能够高效地求解新问题。当然,以上仅为概念设想,但值得开展创新研究。

7 结束语

本文介绍了空间小推力Bang-Bang控制转移轨道的两类延拓解法。第一类解法主要采用能量-燃料同伦得到最优Bang-Bang控制;第二类解法则以推力开关切换

准则为依据通过参数延拓最终得到最优Bang-Bang控制。对于不同类型转移轨道问题,两类解法各有优势。第二类解法在传统直接/间接混合法的基础上,解决了此前无法准确预设开关序列的问题。将两类延拓方法融为一体,有望进一步认识与理解复杂转移轨道问题的求解方案,并有望建立系统的空间小推力轨道优化的方法体系。最后,探讨了基于初解、延拓与拼接的人工智能轨道优化新概念。

参 考 文 献

- [1] Conway B A. Spacecraft trajectory optimization [M].UK: Cambridge University Press, 2010.
- [2] Kemble S. Interplanetary mission analysis and design [M].Netherland: Springer Science & Business Media, 2006.
- [3] Bryson A E, Ho Y. Applied optimal control: optimization, estimation and control [M]. Boca Raton: CRC Press, 1975.
- [4] Gill P E, Murray W, Saunders M A, et al. User's guide for NPSOL (Version 4.0): a FORTRAN package for nonlinear programming [M]. USA: Department of Operations Research, Stanford University, 1986.
- [5] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization [J]. SIAM Review, 2002, 47: 99-131.
- [6] Gill P E, Murray W, Saunders M A. User's guide for SNOPT version 7: software for large scale nonlinear programming[M]. Research Gate, 2008.
- [7] Springer B. KNITRO: an integrated package for nonlinear optimization [J]. Large Scale Nonlinear Optimization, 2010, 83: 35-59.
- [8] Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.
- [9] Rao A V. A survey of numerical methods for optimal control [J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2009, 135(1): 497-528.
- [10] 高扬. 电火箭星际航行: 技术进展、轨道设计与综合优化 [J]. 力学学报, 2011, 43(6): 991-1019.
Gao Y. Interplanetary travel with electric propulsion: technological progress, trajectory design, and comprehensive optimization [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(6): 991-1019.
- [11] 李俊峰, 蒋方华. 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述 [J]. 力学与实践, 2011, 33(3): 1-6.
Li J, Jiang F. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration [J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(3): 1-6.
- [12] Pontryagin L S, Boltyansky V G, Gamkrelidze R V, et al. The mathematical theory of optimal processes [M]. New York: Interscience Publishers, 1962.
- [13] Bartholomew-Biggs M C, Dixon L C W, Hersom S E, et al. From high thrust to low thrust: an application of advanced optimisation methods to mission analysis [J]. ESA J., 1983, 11: 61-73.
- [14] Dixon L C W, Hersom S E, Maany Z A. Low thrust orbit optimisation for interplanetary missions [R]. The Hatfield Polytechnic: Technical Report 137, Numerical Optimisation Centre, 1983.
- [15] Dixon L C W, Maany Z A. To bus and back [C]//ESA Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics. Darmstadt, Germany: ESA, 1986.
- [16] Bartholomew-Biggs M C, Dixon L C W, Hersom S E, et al. The solution of some difficult problems in low-thrust interplanetary trajectory optimization [J]. Optimal Control Applications and Methods, 1988, 9: 229-251.
- [17] Oberle H J, Taubert K. Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997, 95(2): 243-262.
- [18] Fowler W T, O'Neill P M. Relationship between coast arc length and switching function value during optimization [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1976, 3(7): 445-446.
- [19] Chuang C H, Goodson T, Hanson J. Fuel-optimal, low- and medium-thrust orbit transfers in large numbers of burns [C]//AIAA 94-3650, Guidance, Navigation, and Control Conference. USA: AIAA, 1994.
- [20] Chuang J C H, Goodson T D, Hanson J. Multiple-burn families of optimal low- and medium-thrust orbit transfers [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1999, 36(6): 866-874.
- [21] Redding D C. Highly efficient, very low-thrust transfer to geosynchronous orbit-Exact and approximate solutions [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1984, 7(2): 141-147.
- [22] Redding D, Breakwell J V. Optimal low-thrust transfers to synchronous orbit [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1984, 7(2): 148-155.
- [23] Gao, Y. Near-optimal very low-thrust Earth-orbit transfers and guidance schemes [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(2): 529-539.
- [24] Zuiani F, Vasile M. Preliminary design of debris removal missions by means of simplified models for low-thrust, many-revolution transfers [J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2012.
- [25] Goodson T, Chuang J C H, Hanson J, et al. Optimal finite thrust orbit transfers with large numbers of burns [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 139-148.
- [26] Bai X, Turner J D, Junkins J L. A robust homotopy method for equality constrained nonlinear optimization [C]//AIAA 2008-5845, 12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. Columbia: AIAA, 2008.
- [27] Bai X, Turner J D, Junkins J L. Optimal thrust design of a mission to apophis based on a homotopy method [C]//AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting. Georgia: AIAA, 2009.
- [28] Bai X, Turner J D, Junkins J L. Bang-Bang control design by combing pseudospectral method with a novel homotopy algorithm [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Control Conference.[S.l.]: AIAA, 2009.
- [29] Shan J, Ren Y. Low-thrust trajectory design with constrained particle swarm optimization[J]. Aerospace Science and Technology, 2014, 36: 114-124.
- [30] Darby C L, Hager W W, Rao A V. Direct trajectory optimization using a variable low-order adaptive pseudospectral method [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2011, 48(3): 433-445.
- [31] Zondervan K P. Optimal low thrust, three burn orbit transfers with large plane changes [D]. California: California Institute of Technology, 1983.

- [32] Zondervan K P, Wood L J, Caughey T K. Optimal low-thrust, three-burn orbit transfers with large plane changes [J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1984, 32(3): 407-427.
- [33] Ilgen M R. Hybrid method for computing optimal low thrust OTV trajectories [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 1994, 87(2): 941-958.
- [34] Kluever C A, Pierson B L. Optimal Low-Thrust Three-Dimensional Earth-Moon trajectories [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(4): 830-837.
- [35] Gao Y, Kluever C A. Low-thrust interplanetary orbit transfers using hybrid trajectory optimization method with multiple shooting [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence. Rhode Island: AIAA, 2004.
- [36] Bertrand R., Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems: numerical results and statistical interpretation [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2002, 23(4): 171-197.
- [37] Haberkorn T, Martinon P, Gergaud J. Low thrust minimum-fuel orbital transfer: a homotopic approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(6): 1046-1060.
- [38] Gergaud, J, Haberkorn T. Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem [J]. *ESAIM: Control, Optimization, and Calculus of Variations*, 2006, 12(2): 294-310.
- [39] Gergaud J, Haberkorn T. Orbital transfer: some links between the low-thrust and the impulse cases [J]. *Acta Astronautica*, 2007, 60(8-9): 649-657.
- [40] Martinon P, Gergaud J. Using switching detection and variational equations for the shooting method [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2007, 28(2): 95-116.
- [41] Petukhov V G. Optimization of interplanetary trajectories for spacecraft with ideally regulated engines using the continuation method [J]. *Cosmic Research*, 2008, 46(3): 219-232.
- [42] Petukhov V G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories [J]. *Cosmic Research*, 2012, 50(3): 249-261.
- [43] Caillau J B, Daoud B, Gergaud J. Discrete and differential homotopy in circular restricted three-body control [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 2010, 3(3): 229-239.
- [44] Caillau J B, Daoud B, Gergaud J. Minimum fuel control of the planar circular restricted three-body problem [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2012, 114(1-2): 137-150.
- [45] Olympio J T. Optimal control problem for low-thrust multiple asteroid tour missions [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(6): 1709-1720.
- [46] Guo T, Jiang F, Baoyin H, et al. Fuel optimal low thrust rendezvous with outer planets via gravity assist [J]. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, 54(4): 756-769.
- [47] Guo T, Jiang F, Li J. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization [J]. *Acta Astronautica*, 2012, 71: 38-50.
- [48] Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical Techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(1): 245-258.
- [49] Li J, Xi X-N. Fuel-optimal low-thrust reconfiguration of formation-flying satellites via homotopic approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(6): 1709-1717.
- [50] Tarzi Z, Speyer J, Wirz R. Fuel optimum low-thrust elliptic transfer using numerical averaging [J]. *Acta Astronautica*, 2013, 86: 95-118.
- [51] Zhang P, Li J, Baoyin H, Tang G. A low-thrust transfer between the Earth-Moon and Sun-Earth systems based on invariant manifolds [J]. *Acta Astronautica*, 2013, 91: 77-88.
- [52] Chen Y, Baoyin H, Li J. Accessibility of main-belt asteroids via gravity assists [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(2): 623-632.
- [53] Zhang P, Li J, Gong S. Fuel-optimal trajectory design using solar electric propulsion under power constraints and performance degradation [J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2014, 57(6): 1090-1097.
- [54] Zhang C, Toppato F, Bernelli-Zazzera F, et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(8): 1501-1510.
- [55] 张晨, 赵育善. 混合推进最省燃料轨道设计方法 [J]. *宇航学报*, 2015, 36(8): 869-876.
- Zhang C, Zhao Y. A method for hybrid propulsion minimum fuel trajectory optimization [J]. *Journal of Astronautics*, 2015, 36(8): 869-876.
- [56] 陆毅, 李济生, 李恒年, 等. 基于星历匹配法的载人小行星探测轨迹优化问题求解[J]. *力学与实践*, 2014, 36(2): 172-179.
- Lu Y, Li J, Li H, et al. Problem solving of the manned asteroids exploration trajectory optimization based on ephemeris matching method [J]. *Mechanics in Engineering*, 2014, 36(2): 172-179.
- [57] 黄岸毅, 车征, 李恒年, 等. 有限推力多小行星探测轨迹优化[J]. *力学与实践*, 2015, 37(1): 49-55.
- Huang A, Che Z, Li H, et al. Low-thrust trajectory optimization for multi-asteroid exploration [J]. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(1): 49-55.
- [58] 朱小龙, 刘迎春, 高扬. 航天器最优受控绕飞轨迹推力幅值延拓设计方法[J]. *力学学报*, 2014, 46(5): 756-769.
- Zhu X, Liu Y, Gao Y. Thrust-amplitude continuation design approach for solving spacecraft optimal controlled fly-around trajectory [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(5): 756-769.
- [59] 朱小龙, 马剑, 刘强, 等. 月面远程运输飞行轨迹优化设计[J]. *载人航天*, 2015, 21(1): 75-82.
- Zhu X, Ma J, Liu Q, Gao Y. Optimization design of long-range transport flight trajectories on lunar surface [J]. *Manned Spaceflight*, 2015, 21(1): 75-82.
- [60] Battin, R.H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics [M]. [S.l.]: AIAA Education Series, 1987.
- [61] 朱政帆, 甘庆波. 第七届全国空间轨道设计竞赛乙组解法[J]. *力学与实践*, 2016, 38(5): 596-602.
- Zhu Z, Gan Q. 7th National space trajectory design competition: results of problem B [J]. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(5): 596-602.
- [62] 孟雅哲. 航天器燃耗最优轨道直接/间接混合法延拓求解[J]. *航空学报*, 2017, 38(1): 259-280.
- Meng Y. Minimum-fuel spacecraft transfer trajectories solved by direct/indirect hybrid method with continuation [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2017, 38(1): 259-280.
- [63] Zhu Z, Gao Y, Yang X, et al. Solving fuel-optimal low-thrust orbital transfers with bang-bang control using a novel continuation technique

- [J]. Acta Astronautica, accepted.
- [64] Shen H X, Casalino L, Luo Y Z. Global Search Capabilities of Indirect Methods for Impulsive Transfers [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2015, 62(3): 212-232.
- [65] Shen H X, Casalino L, Li H Y. Adjoints estimation methods for impulsive Moon-to-Earth trajectories in the restricted three-body problem[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36(4): 463-474.
- [66] Shen H X, Casalino L. Indirect optimization of three-dimensional multiple-impulse Moon-to-Earth transfers [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2014, 61(3): 255-274.

作者简介:

朱政帆(1988-), 男, 博士研究生, 主要研究方向: 空间小推力轨道优化、空间任务设计。

通信地址: 北京海淀区邓庄南路9号(100094)

电话: (010)82178880

E-mail: zhuzhengfan@aoe.ac.cn

高扬(1974-), 男, 研究员, 主要研究方向: 空间轨道优化、定轨与导航、空间动力学与控制。

通信地址: 北京海淀区邓庄南路9号(100094)

电话: (010)82178228

E-mail: gaoyang@csu.ac.cn

Survey of Two Classes of Continuation Methods for Solving Optimal Bang-Bang Control of Low-Thrust Space Trajectories

ZHU Zhengfan¹, GAO Yang^{2*}

(1. Academy of Opto-electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China;

2. Technology and Engineering Center for Space Utilization, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China)

Abstract: The optimal Bang-Bang control problem of low-thrust space trajectories is introduced. Two classes of continuation methods are described: the first solves the energy-optimal solution, and subsequently employs the energy-fuel homotopy to obtain the optimal Bang-Bang control; the second introduces a switching principle, and obtains the optimal Bang-Bang control through parameter continuation starting from a two-impulse solution. The two continuation methods are compared, and the advantages and characteristics of the two methods are discussed. The prospects of the continuation methods applying to more complicated low-thrust trajectory designs are proposed. The concept of artificial intelligence trajectory optimization is presented, which contains three aspects: initial solution, continuation, and patching.

Key words: low thrust; numerical optimization; Bang-Bang control; homotopy continuation; artificial intelligence

[责任编辑: 高莎, 英文审校: 朱鲁青]