

# 地月L2点周期轨道的月球背面覆盖分析

刘磊<sup>1,2,3</sup>, 曹建峰<sup>1,2</sup>, 胡松杰<sup>1,2</sup>, 唐歌实<sup>1,2</sup>

(1. 航天飞行动力学技术重点实验室, 北京 100094; 2. 北京航天飞行控制中心, 北京 100094;  
3. 国防科技大学 理学院, 长沙 410073)

**摘要:** 地月L2点附近轨道具备独特的动力学和运动学特性, 是月球背面探测任务的中继卫星首选布设位置。面向未来月球背面探测任务的中继通信需求, 分析并研究了地月L2点周期轨道(halo轨道)对月球背面的覆盖。在圆型限制性三体问题模型下, 研究并给出了halo轨道族延拓计算方法, 基于延拓法设计了地月系大范围南北halo轨道族; 给出了中继卫星的月球背面覆盖计算模型, 定义了相应的时间覆盖因子; 数值仿真了地月系南北halo轨道族的月球背面覆盖情况。研究结果表明: 地月L2点周期轨道幅值和类型决定其对月面的覆盖性, 幅值较小的轨道的月面整体覆盖性较好, 幅值较大的轨道对月球南北极覆盖较好, 南北族轨道分别有利于月球南北半球的覆盖。文章研究可为我国“嫦娥4号”月球背面探测任务的中继星轨道设计提供有益参考和借鉴。

**关键词:** 月球探测; 平动点; halo轨道; 延拓法; 月面覆盖

**中图分类号:** V412

**文献标识码:** A

**文章编号:** 2095-7777(2017)04-0361-06

**DOI:** 10.15982/j.issn.2095-7777.2017.04.008

**引用格式:** 刘磊, 曹建峰, 胡松杰, 等. 地月L2点周期轨道的月球背面覆盖分析[J]. 深空探测学报, 2017, 4(4): 361-366.

**Reference format:** Liu L, Cao J F, Hu S J, et al. Coverage of lunar farside surface of the Earth-Moon L2 periodic orbits[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2017, 4(4): 361-366.

## 0 引言

圆型限制性三体问题具有5个平动点, 其附近的周期轨道由于独特的空间位置和动力学特性, 非常适合于空间观测和中继通信等应用, 或者作为深空探测的低能量转移中枢<sup>[1]</sup>。截至目前, 国际上已成功发射了十余个平动点探测器, 其中绝大多数为日地平动点探测器, 包括2011年进入日地L2点拟周期轨道开展探测的我国“嫦娥2号”卫星<sup>[1]</sup>, 此外在我国2013年实施的“嫦娥3号”任务中, 也曾考虑过借助日地平动点的应急轨道方案<sup>[3-4]</sup>。对于地月平动点, 虽然目前仅有美国ARTEMIS任务<sup>[5]</sup>和我国“嫦娥5T1”任务<sup>[6-7]</sup>开展了地月平动点飞行, 但是其对月球和深空探测具有非常重要的应用价值, 尤其是一直对月球背面可见的地月L2点, 其附近轨道是未来月球背面探测任务的中继卫星首选布设位置。

在圆型限制性三体问题下, 平动点附近轨道包括周期和拟周期轨道, 其中周期轨道即halo轨道可以有效避免拟周期轨道受到小天体遮挡的问题, 因而更适

合于作为中继通信轨道。基于目前国内外对圆型限制性三体问题动力学特性和相关解的充分研究可知<sup>[8-10]</sup>, 平动点附近的周期轨道并不唯一, 而是存在南北两个周期轨道族, 这就需要根据不同任务需求和约束, 从众多周期轨道中选择和设计合理的平动点中继通信轨道。对于月球背面探测任务而言, 中继通信轨道对月球表面的覆盖性将是最为重要的设计约束之一。

为此, 本文面向未来月球背面探测任务需求, 分析并研究了地月L2点周期轨道对月球背面的覆盖。基于halo轨道族延拓计算方法<sup>[10]</sup>, 选择不同族参数计算得到了地月L2点大范围南北halo轨道族。进而定义了halo轨道对月球表面的时间覆盖因子, 最后分析了南北halo轨道族对月球背面的覆盖情况。文章研究可直接用于我国“嫦娥4号”月球背面探测任务的中继通信卫星轨道设计。

## 1 轨道维持

### 1.1 halo轨道族计算

设一个三体系统中, 第三体的质量 $m$ 远小于其他

收稿日期: 2017-06-01 修回日期: 2017-08-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11303001, 11373013, 61573049, 61304233); 中国博士后科学基金资助项目(2016M592947)

两个天体 $m_1$ 和 $m_2$ ，不考虑第三体对其他两个大天体的引力作用，即设 $m \ll m_2 < m_1$ ，其他两个大天体在相互引力作用下作Kepler运动，若相对运动为圆运动，则构成圆型限制性三体问题。一般在旋转坐标系或称会合坐标系下研究圆型限制性三体问题，即以 $m_1$ 和 $m_2$ 的共同质心为原点 $O$ ， $m_1$ 指向 $m_2$ 的连线为 $x$ 轴，相对运动平面为 $xy$ 平面，由此得到旋转坐标系 $O-xyz$ ，如图1所示。

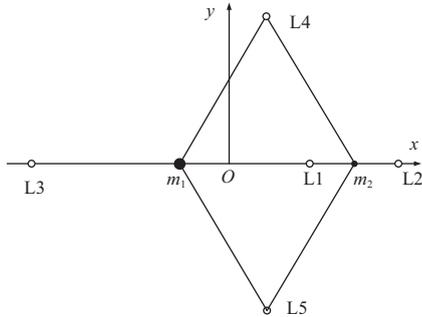


图1 会合坐标系和平动点

Fig. 1 Synodic coordinate and libration points

将质量、长度和时间单位无量纲化<sup>[9]</sup>，经推导可得小天体 $m$ 在 $O-xyz$ 中的运动方程

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} \Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}} + \\ \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}} \\ \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (2)$$

由上述运动方程可知，该方程存在5个平动解，对应为圆型限制性三体问题的5个平动点，如图1所示。在平动点附近，将式(1)关于平动点线性展开，从而得到平动点附近运动的一阶解析形式

$$\begin{cases} \Delta x = A_x \cos(\eta\tau + \phi), \\ \Delta y = kA_x \sin(\eta\tau + \phi) \\ \Delta z = A_z \cos(\zeta\tau + \psi) \end{cases} \quad (3)$$

其中： $A_x$ 和 $A_z$ 分别为 $x$ 和 $z$ 方向的运动幅值； $\eta$ 和 $\zeta$ 分别为 $x$ 和 $z$ 方向的运动频率； $\phi$ 和 $\psi$ 分别为 $x$ 和 $z$ 方向的初始

相位。

一般情况下运动频率 $\eta$ 和 $\zeta$ 并不相等，但是当运动幅值充分大时，非线性项的影响可能使得二者相等，从而形成周期轨道。Richardson等采用Lindstedt-Poincaré法，人为约束不同方向的轨道幅值和相位，构造了共线平动点halo轨道的三阶近似解<sup>[9]</sup>，成为目前halo轨道数值设计的经典初始解。

虽然式(3)为一阶解，但是反映了平动点周期轨道的主要特性，即halo轨道关于 $xz$ 平面对称，且垂直穿越 $xz$ 平面，该特性是halo轨道数值设计的直接依据。基于该特性，选择初始状态 $\mathbf{x}_0$ 位于会合坐标系 $xz$ 平面，由 $\mathbf{x}_0$ 积分 $t$ 时刻至末状态 $\mathbf{x}_d$ ，通过微分修正 $\mathbf{x}_0$ 和 $t$ 使得轨道再次穿越 $xz$ 平面时垂直于该平面，即 $x$ 和 $z$ 方向速度为0，设 $\mathbf{x}_d$ 的偏差量为 $\delta\mathbf{x}_d$ ，修正量分别为 $\delta\mathbf{x}_0$ 和 $\delta t$ ，则迭代过程为

$$\begin{bmatrix} \delta y_d \\ \delta \dot{x}_d \\ \delta \dot{z}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{21} & \Phi_{23} & \Phi_{25} & \dot{y}_d \\ \Phi_{41} & \Phi_{43} & \Phi_{45} & \dot{x}_d \\ \Phi_{61} & \Phi_{63} & \Phi_{65} & \dot{z}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta z_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta t \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中： $\Phi_{ij}(i=2,4,6; j=1,3,5)$ 表示状态转移阵 $\Phi(t_1; t_0)$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列个分量<sup>[8]</sup>。实际计算时，往往积分到再次穿越 $xz$ 平面，从而有 $\delta y_d = 0$ ，于是可以求解出 $\delta t$ ，再代入式(4)使之简化。

利用上述halo轨道数值方法，一般固定式(4)的某个待求参数如 $x_0$ 、 $z_0$ 、 $\dot{y}_0$ 或 $T$ ，将之定义为halo轨道族的族参数，可以延拓计算得到halo轨道族。延拓法是一种求解非线性方程组的大范围收敛算法<sup>[11]</sup>，对 $\mathbf{x}_0$ 与真实解的逼近程度要求较低。对于如下非线性方程组

$$F(\mathbf{X}) = 0, \quad F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5)$$

延拓法构造一族映射 $H: D \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，且有

$$H(\mathbf{X}, 0) = F_0(\mathbf{X}), \quad H(\mathbf{X}, 1) = F(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in D \quad (6)$$

其中 $F_0(\mathbf{X}) = 0$ 的解 $\mathbf{X}_0$ 已知， $H(\mathbf{X}, 1) = 0$ 的解即式(5)的解，即将求解式(5)转化为求如下同伦方程组的解

$$H(\mathbf{X}, \nu) = 0, \quad \nu \in [0, 1], \quad \mathbf{X} \in D \quad (7)$$

式(4)对应于延拓法中的待求问题 $F(\mathbf{X})$ ，除族参数以外的变量即待求参数 $\mathbf{X}$ ，族参数即同伦方程组变量 $\nu$ 。基于延拓法的halo轨道族计算方法具体参见文献[10]。需要指出，由于halo轨道族分布复杂且计算受族参数影响较大，如果仅按照某个特定族参数计算，可能出现迭代发散现象，从而无法得到完整连续的halo轨道族。因此，需要在延拓计算过程中注意族

参数的选择, 并根据计算结果做相应调整。

## 1.2 月面覆盖计算

地月L2点中继卫星对月面的覆盖计算与一般中继卫星大致相同, 其有别于地球中继卫星之处在于, 月球的公转速度与自转速度相同, 即在地月会合坐标系中, 月球背面始终是x轴上下和左右90°对应的月表区域, 因此, 在地月会合坐标系中计算月面覆盖非常方便。进一步, 将地月会合坐标系O-xyz的原点移至月球质心, 得到月心地月会合坐标系用于月面覆盖计算。

在月心地月会合坐标系中, 地月L2点中继卫星的月面覆盖如图2所示, 其中 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_s$ 分别为月面点和平动点中继卫星的月心矢量,  $\mathbf{r}_{us}$ 为月面点到中继卫星的月心矢量, 即

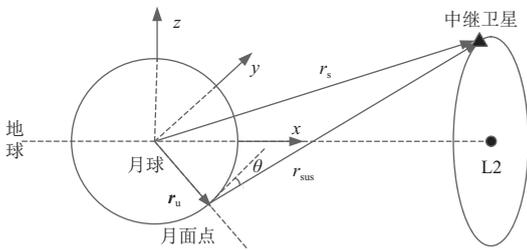


图2 地月L2点轨道的月面覆盖

Fig. 2 Surface Coverage of the Earth-Moon L2 Orbit

$$\mathbf{r}_{us} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_u \quad (8)$$

$\theta$ 为中继卫星相对于月面点的月面观测仰角, 即

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{r}_{us} \cdot \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_{us}| |\mathbf{r}_u|}\right) \quad (9)$$

在不考虑月表地形遮挡和其他覆盖约束条件下, 只要 $\theta$ 大于给定的观测仰角约束 $\theta_c$ , 即认为中继卫星对该月面点可见, 可以实现覆盖。考虑到平动点halo轨道的周期性, 可以用一个轨道周期内可见时长 $t_a$ 与轨道周期 $T$ 的比例衡量该halo轨道对该月面点的时间覆盖性能, 即覆盖时间因子 $\kappa$

$$\kappa = \frac{t_a}{T} \quad (10)$$

利用 $\kappa$ 衡量halo轨道的月面覆盖性能不仅直观, 而且可以间接估计特定覆盖指标所需要的卫星数, 在均匀相位布设条件下, 如果某个halo轨道对某特定月面点的覆盖时间因子为 $\kappa$ , 则持续覆盖所需的最少卫星数为 $\lceil 1/\kappa \rceil$ , 中括号表示向上取整。

在月球背面逐点计算覆盖时间因子, 即可得到单个halo轨道对月球背面的覆盖情况。在月心地月会合坐标系中定义月面点的经度和纬度分别为 $\alpha$ 和 $\delta$ , 分别在xy和xz平面内, 以y轴和z轴指向为正。设月球平均半

径为 $r_L$ , 则在月心地月会合坐标系下有

$$\mathbf{r}_u = r_L \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (11)$$

进一步, 对地月L2点南北halo轨道族逐个计算月球背面覆盖, 可以得到整个轨道族的覆盖情况。

## 2 数值仿真

采用前述halo轨道族计算方法计算地月L2点南北halo轨道族, 继而分析相应的halo轨道对月球背面的覆盖情况。

### 2.1 地月系halo轨道族

依次选择 $z_0$ 和 $x_0$ 作为族参数, 可以延拓得到地月L2点南北轨道族, 受篇幅限制, 这里仅给出北族halo轨道, 如图3所示, 南族halo轨道与北族轨道关于会合坐标系xy平面对称。图3中相邻轨道变化较大之处由族参数切换造成, 如果进一步缩小族参数, 可以减小这个间隔。

由图3可见, 采用延拓法得到的周期轨道可以从平动点附近, 一直分布到月球附近。不过, 月球附近的周期轨道已经成为近似环月轨道, 如果考虑到月球和其他摄动力影响, 其附近的周期轨道维持可能超出实际能力。同时, 由图3显而易见, 北族halo轨道大部分位于会合坐标系xy平面上方, 因而对月球北半球覆盖性较好, 南族轨道则会与之相反。

按照式(3)中 $A_x$ 和 $A_y$ 的定义, 给出南北halo轨道族的幅值变化, 如图4所示。

由图4可见, 随着halo轨道远离平动点, 其 $A_x$ 幅值逐渐增加, 但是 $A_y$ 幅值的变化并不单调, 先由初始的0增大至接近30 000 km, 然后减小。文献[10]中详细分析了地月系平动点周期轨道族的性质和运动特性。

### 2.2 月面覆盖

利用前述月面覆盖计算方法, 计算2.1节的地月系halo轨道族对月球背面的覆盖时间因子 $\kappa$ , 其中观测仰角约束 $\theta_c$ 取5°, 给出南北族中6条halo轨道的结果, 如图5和图6所示。

由图5和图6可见, 与前述定性分析相同, 南北族halo轨道各自对月球背面南北区域的覆盖性较好。幅值较小的halo轨道由于离月球较远, 因而对月球背面大部分区域的覆盖均较好, 可以接近或者达到100%, 而且南北族halo轨道的覆盖性能差别不大, 不足之处在于对月球南北极的覆盖较差。

随着幅值增大, 月面覆盖性能最好的区域越来越

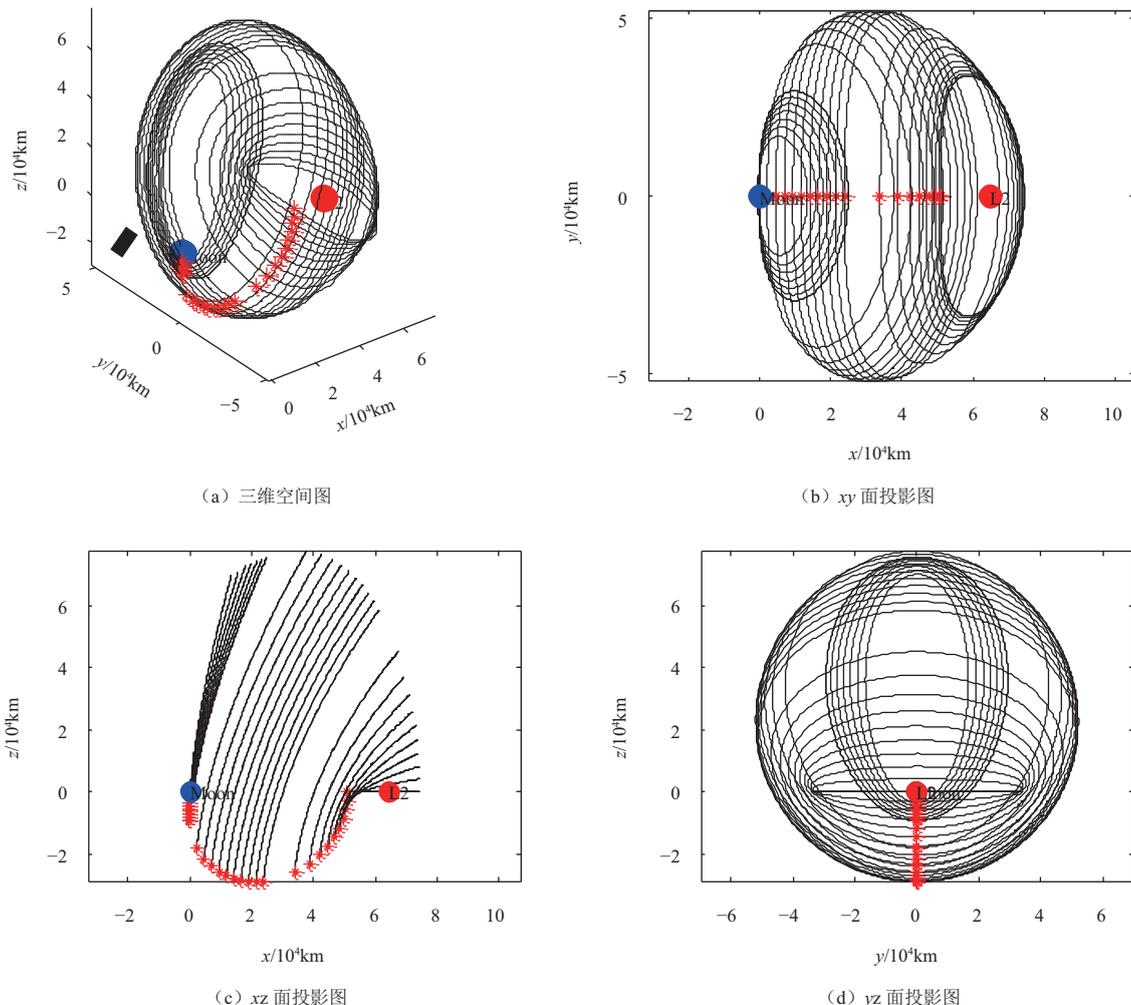


图3 地月系L2点北族halo轨道族  
Fig. 3 North halo family of the Earth-Moon L2 point

小，逐渐收缩至会合坐标系x轴附近，而且南族和北族halo轨道对月球北部和南部区域的覆盖性迅速下

降，不过，与之对应的是月球南北极的覆盖性得到明显提升。

### 3 结论

面向未来月球背面探测任务的中继通信需求，分析并研究了地月L2点周期轨道对月球背面的覆盖。研究表明，地月L2点周期轨道幅值和类型决定其对月面的覆盖性，幅值较小的轨道的整体覆盖性较好，幅值较大的轨道对月球南北极覆盖较好，南北族轨道分别有利于月球南北半球的覆盖。文中方法和数值计算结果可为我国“嫦娥4号”月球背面探测任务的中继星轨道设计提供有益借鉴。

文中halo轨道考虑的是圆型限制性三体问题模型，实际任务中还应考虑高精度力模型对halo轨道的影响，尤其是摄动造成的轨道修正与控制对月面覆盖的影响。此外，实际任务中的多种测控约束、月球的真实运动特性等因素，均会直接影响中继卫星对月面

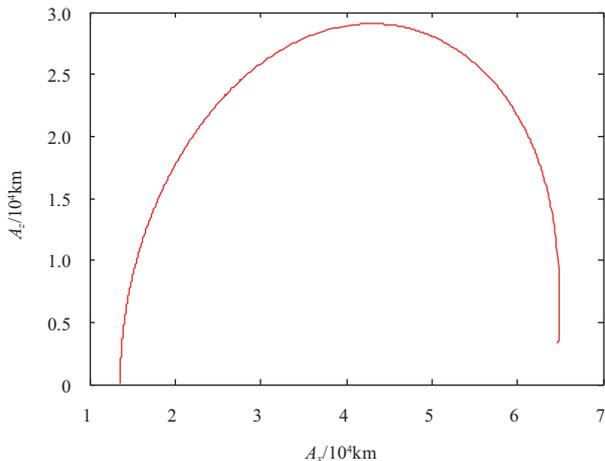


图4 地月系halo轨道族的幅值变化  
Fig. 4 Amplitude of the Earth-Moon halo family

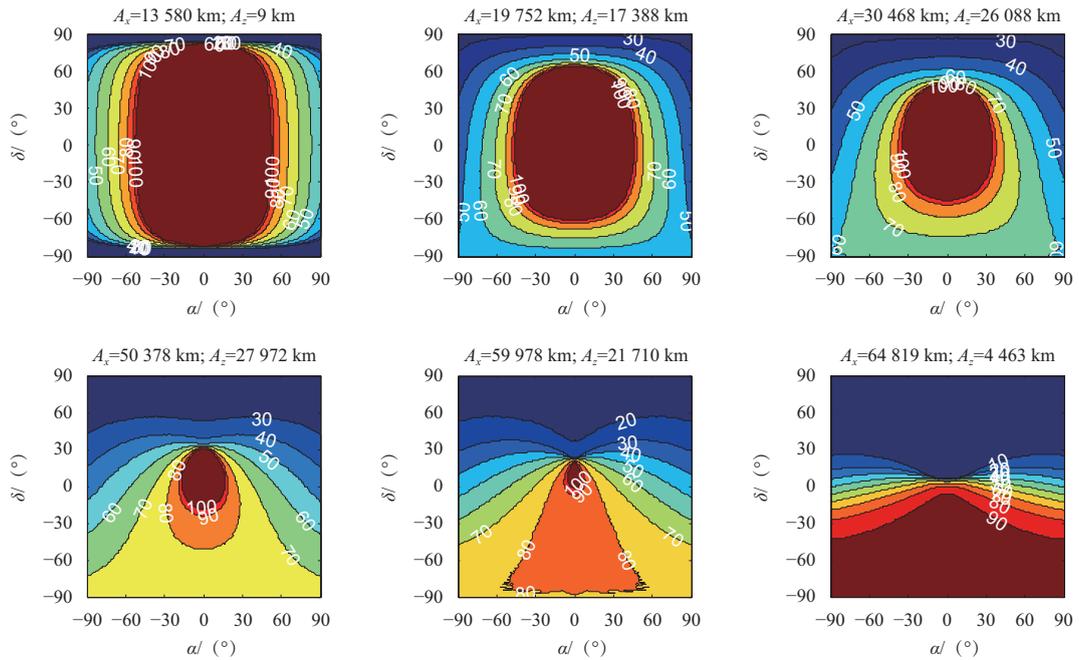


图6 地月系南族halo轨道的月面覆盖

Fig. 6 The lunar surface coverage of the Earth-Moon south halo orbit family

的实际覆盖性能, 这将在后续工作中做进一步深入研究。

### 参 考 文 献

- [1] Lo M W. The interplanetary superhighway and the origins program[C]// IEEE Space 2002 Conference. Big Sky, MT, US: IEEE, 2002.
- [2] Wu W R, Liu Y, Liu L, et al. Pre-LOI trajectory maneuvers of CHANG'E-2 libration point mission [J]. Science China, 2012, 55(6): 1249-1258.
- [3] Liu L, Liu Y, Cao J, et al. Chang'E-2 lunar escape maneuvers to the Sun-Earth L2 libration point mission[J]. Acta Astronautica, 2014, 93: 390-399.
- [4] Liu L, Cao J, Liu Y, et al. Chang'E-3 contingency scheme and trajectory[J]. Advances in Space Research, 2015, 55: 1074-1084.
- [5] Angelopoulos V. The Artemis mission[J]. Space Science Reviews, 2011, 165: 3-25.
- [6] 刘磊, 唐歌实, 胡松杰, 等. 月球探测再入返回后续飞行方案研究[J]. 宇航学报, 2015, 36(1): 9-17.  
Liu L, Tang G S, Hu S J, et al. Follow-up flight scheme for the reentry test of China lunar exploration [J]. Journal of Astronautics, 2015, 36(1): 9-17.
- [7] Liu L, Li J S. CHANG'E-5T1 extended mission: the first lunar libration point flight via a lunar swing-by[J]. Advances in Space Research, 2016, 58(4): 609-618.
- [8] Chow N, Gralla E. Low Earth orbit constellation design using the Earth-Moon L1 point [D]. New Jersey: Princeton University, 2004.
- [9] Richardson D L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1980, 22(3): 241-253.
- [10] 刘磊, 刘勇, 曹建峰, 等. halo轨道族延拓方法及特性研究[J]. 中国空间科学技术, 2013, 33(1): 30-36.  
Liu L, Liu Y, Cao J F, et al. Kinetic characteristics and continuation algorithm of periodic families [J]. Chinese Space Science and Technology, 2013, 33(1): 30-36.
- [11] 李庆扬, 莫夜中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.  
Li Q Y, Mo Z Z, Qi L Q. Numerical methods for non-linear equation group [M]. Beijing: Science Press, 1997.

作者简介:

刘磊(1980-), 男, 工程师, 主要研究方向: 深空探测轨道设计与控制。

通信地址: 北京5130信箱120#(100094)

电话: (010)66362455

E-mail: llbacc@139.com

## Coverage of Lunar Farside Surface of the Earth-Moon L2 Periodic Orbits

LIU Lei<sup>1,2,3</sup>, CAO Jianfeng<sup>1,2</sup>, HU Songjie<sup>1,2</sup>, TANG Geshi<sup>1,2</sup>

(1. Science and Technology on Aerospace Flight Dynamics Laboratory, Beijing 100094, China;

2. Beijing Aerospace Control Center, Beijing 100094, China;

3. Science College of National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Orbits nearby the Earth-Moon libration points have the specific dynamic characteristics and are the preferred position of relay satellites for the lunar farside exploration. For relay requirements of the future lunar farside exploration, the surface coverage of the Earth-Moon L2 periodic orbits is studied. Firstly, the continuation method calculating the halo orbit family is proposed with the circular restricted three-body problem. The south and north halo families with a large scope are calculated in the Earth-Moon system. Secondly, the coverage model of the lunar farside surface is presented for the relay satellites. The coverage factors are consequently defined. Finally, the coverage is numerically simulated. The results show that the coverage capacity is decided by the amplitude and style of L2 orbits. A halo orbit with small amplitude has an excellent entire coverage capacity, while a large one has a better coverage capacity for the south or north poles. Furthermore, the research can provide a beneficial reference for the orbit design of the future CHANG'E-4 mission.

**Key words:** lunar exploration; libration point; halo orbit; continuation method; lunar surface coverage

[责任编辑: 杨晓燕, 英文审校: 朱恬]