

航天器分布式有限时间编队方法

康坤^{1,2}, 单家元^{1,2}

(1. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081; 2. 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

摘要: 以二阶积分环节作为单体航天器动力学模型, 在固定通信拓扑的基础上, 假设每个航天器仅获取相邻航天器的速度位置信息, 设计了分布式有限时间跟踪控制算法, 并证明了算法的有效性。在该算法的基础上, 采用了虚拟结构和阶级控制方法, 使第一级航天器接受虚拟领队形成的虚拟结构信息, 次级航天器接受上一级航天器信息, 给出了有限时间编队方法, 并通过数值仿真验证了该编队算法。

关键词: 分布式控制; 航天器编队; 有限时间收敛; 阶级控制

中图分类号: V11

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2017)04-0390-05

DOI: 10.15982/j.issn.2095-777.2017.04.0013

引用格式: 康坤, 单家元. 航天器分布式有限时间编队方法[J]. 深空探测学报, 2017, 4(4): 390-394.

Reference format: Kang K, Shan J Y. Distributed finite-time control method for formation flying[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2017, 4(4): 390-394.

0 引言

航天器编队是由若干颗航天器组成编队, 保持一定相对位置关系, 各航天器间密切联系, 共同完成某项空间任务的飞行技术, 是近年来空间科学领域研究热点之一。编队系统一般由一颗主航天器和几颗围绕其飞行的从航天器组成, 各航天器之间距离较近, 从几十米到几十千米。航天器编队具有成本低、系统冗余性和鲁棒性强、自主性高等特点, 具有广阔的应用前景。分布式控制是2005年后出现的控制方式, 旨在减轻通信负担, 增强被控对象的自主性。在分布式控制策略中, 每颗航天器均具有独立的局部决策能力, 仅采用相邻单位信息, 应用相互的通信网络协调, 便可形成期望的编队运动。典型的协同控制方式有主从式、基于行为和虚拟结构的方式等。

早期的航天器位置编队主要以领从方式为主, 更多考虑轨道动力学对于航天器编队的影响。在轨道动力学的基础上, 多采用HCW (Hill-Clohessy-Wiltshire) 方程等模型, 附加控制约束或控制指标, 进行分析设计^[1-4]。分布式控制出现后, 大量研究偏向于将动力学模型简化为二阶积分环节, 侧重通信拓扑特性以及分布式控制对编队的影响, 文献[5]讨论了通信延时对于一致性的影响; 文献[6]~文献[7]在有向图的基础上, 设计了切换拓扑下的跟踪控制器, 并在一定切换模式下证明了其有效性; 文献[8]基于二阶积分环节和切换

拓扑, 设计了分布式观测器用于提取速度信息, 并完成了一致性控制器的设计。在阵型控制方面, 文献[9]引入虚拟结构的概念, 实现了航天器编队的分布式姿态控制; 文献[10]针对一阶积分模型设计了有限时间稳定的阵型控制算法。

本文以二阶积分环节为模型, 设计了航天器编队的分布式有限时间跟踪控制器, 同时采用虚拟结构和阶级控制方法, 实现了有限时间的阵型控制, 并通过数值仿真验证了算法的有效性。

1 预备知识

为突出有限时间控制器设计, 本文航天器编队问题的动力学系统如下

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

其中: $x_i(t), v_i(t), u_i(t) \in \mathbb{R}^N, N = 1, 2, 3$ 分别为第 i 个航天器的位置、速度和控制输入。当 $i = 0$ 时, 即 x_0 和 v_0 分别代表领队或虚拟领队的位置和速度。

1.1 运算符号

对于向量 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T, \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, 定义 $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)^T$ 。令 $|\mathbf{a}|^\alpha = (|a_1|^\alpha, \dots, |a_n|^\alpha)^T$, $\text{sig}(\mathbf{a}) = (\text{sign}(a_1), \dots, \text{sign}(a_n))^T$, 其中 $\alpha > 0$, 则定义 $\text{sig}(\mathbf{a})^\alpha = \text{sig}(\mathbf{a}) \odot |\mathbf{a}|^\alpha$ 。

1.2 代数图论

本文采用无向图描述航天器之间的通信拓扑。对于无领导关系的多航天器系统, 认为每个航天器为顶点, 其间的信息交互由无向图 G 表示, 记为 $G = \{V, E, A\}$, 其中 $V = \{v_i, i = 1, \dots, n\}$ 为所有顶点构成的集合, $E \subseteq V \times V$ 为所有边构成的集合。 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 是图 G 的邻接矩阵, 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

对于带有权重的邻接矩阵 A , 其元素 a_{ij} 定义为当 $(j, i) \in E$ 时, 即航天器 i 可获取航天器 j 的信息时, $a_{ij} > 0$; 反之, $a_{ij} = 0$ 。对于无向图, 有 $a_{ij} = a_{ji}$ 。

定义顶点 v_i 的邻居所构成的集合为 N_i , $N_i = \{j: (v_i, v_j) \in E\}$, 记顶点 v_i 的出度为 $\text{deg}_{\text{out}}(v_i) = d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$, 则图 G 的度量矩阵可表示为 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ 。因此, 图 G 的拉普拉斯矩阵可表示为 $L = D - A$ 。

对于有领导关系的多航天器系统, v_0 表示领航航天器, v_1, \dots, v_n 表示从航天器, 则包含领航的图 G 的顶点集变为 $\bar{V} = V \cup \{v_0\}$ 。领航之间的通信拓扑关系由 $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$ 表示, 为领航-从单向通信。若从航天器能接收到领航信息, 则 $b_i > 0$; 反之, $b_i = 0$ 。

1.3 定义及引理

引理1^[11] 对于矩阵 $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, 若 $b_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n b_i > 0$, 无向图 G 的拉普拉斯矩阵 $\bar{L} = L + B$ 是正定的, 当且仅当无向图 G 是连通的。

引理2^[12] 考虑系统

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in R^n$$

假定存在一个定义在原点邻域 $U \in R^n$ 上的连续正定函数 $V(x)$, 并且存在实数 $c > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$, 使得 $\dot{V}(x) + cV(x)^\alpha \leq 0$, 则系统原点是有限时间稳定的, 且稳定时间 T 满足 $T \leq \frac{V(x(0))^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$ 。若 $U = R^n$ 且 $V(x)$ 是径向无界的, 则系统的原点是全局有限时间稳定的。

定义1 (有限时间跟踪) 对于系统(1), 控制律 $u_i(t)$ 可实现有限时间跟踪控制, 当且仅当存在某有限时间 t^* , 有

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow (t^*)^-} |x_i(t) - x_0(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow (t^*)^-} |v_i(t) - v_0(t)| = 0 \\ x_i(t) = x_0(t), v_i(t) = v_0(t), \quad t \geq t^* \end{cases}$$

其中: $x_0(t), v_0(t)$ 为领航航天器状态或虚拟领航航天器的状态。

2 主要结果

2.1 有限时间跟踪控制

为不失一般性, 首先从 $x_i, v_i, u_i \in R$ 出发, 设计有限时间跟踪控制律。

考虑如下跟踪控制律

$$u_i = -\text{sig}\left(k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i - x_j) + k_2 b_i (x_i - x_0)\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - \text{sig}\left(k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_i - v_j) + k_2 b_i (v_i - v_0)\right)^\alpha \quad (2)$$

其中: $i = 1, \dots, n, \alpha \in (0, 1), k_1 > 0, k_2 > 0$ 。当 $\alpha = 1$ 时, 控制律(2)退化为双积分环节的无限时间收敛控制律。

定理1 若表示航天器间通信拓扑的无向图 G 为连通图, 且至少有一个航天器能接收到领航信息, 则在控制律(2)的作用下, 系统(1)可以实现有限时间跟踪控制。

证明: 令 $\bar{x}_i = x_i - x_0, \bar{v}_i = v_i - v_0$, 并将控制律式(2)带入式(1), 可得

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = \bar{v}_i \\ \dot{\bar{v}}_i = -\text{sig}\left(\sum_{j \in N_i} \tilde{a}_{ij} (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \tilde{b}_i \bar{x}_i\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - \text{sig}\left(\sum_{j \in N_i} \tilde{a}_{ij} (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + \tilde{b}_i \bar{v}_i\right)^\alpha \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\tilde{a}_{ij} = k_1 a_{ij}, \tilde{b}_i = k_2 b_i$ 。

记 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ 并令 $p_i = -\sum_{j \in N_i} \tilde{a}_{ij} (\bar{x}_i - \bar{x}_j) - \tilde{b}_i \bar{x}_i$, $q_i = -\sum_{j \in N_i} \tilde{a}_{ij} (\bar{v}_i - \bar{v}_j) - \tilde{b}_i \bar{v}_i$, 则有 $p = -(\bar{L} + \bar{B})\bar{x}, q = -(\bar{L} + \bar{B})\bar{v}$, 其中 $\bar{L} = k_1 L, \bar{B} = k_2 B$ 。上述变换将 $(\bar{x}^T, \bar{v}^T)^T$ 有限时间稳定问题转化为 $(p^T, q^T)^T$ 有限时间稳定问题。

将上述变换代入(3), 可得误差系统

$$\begin{cases} \dot{p} = q \\ \dot{q} = -(\bar{L} + \bar{B}) \left(-\text{sig}\left(\frac{(\bar{L} + \bar{B})\bar{x}}{2-\alpha} - \text{sig}\left(\frac{(\bar{L} + \bar{B})\bar{v}}{2-\alpha}\right)^\alpha \right) \right) \\ = -(\bar{L} + \bar{B}) \left(\text{sig}(p) \frac{\alpha}{2-\alpha} + \text{sig}(q)^\alpha \right) \end{cases} \quad (4)$$

取备选李雅普诺夫函数

$$V(p, q) = \frac{1}{2} q^T (\bar{L} + \bar{B})^{-1} q + \frac{2-\alpha}{2} \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T |p|^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

由引理1可知, 当 $\alpha \in (0, 1)$ 时, V 正定。延系统式

(4) 轨线进行微分, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(p, q) &= q^T (\tilde{L} + \tilde{B})^{-1} \dot{q} + \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T \text{sig}(p)^{\frac{1}{2-\alpha}} \odot \dot{p} \\ &= -q^T \text{sig}(p)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - q^T \text{sig}(q)^\alpha + \left(\text{sig}(p)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right)^T q \\ &= -\left(|q|^{\frac{1+\alpha}{2}} \right)^T |q|^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq 0\end{aligned}\quad (5)$$

根据式(4)和式(5)可得如下性质

$$V(k^{2-\alpha} p, kq) = k^2 V(p, q) \quad (6)$$

$$\dot{V}(k^{2-\alpha} p, kq) = k^{1+\alpha} \dot{V}(p, q) \quad (7)$$

由式(6)可知 V 径向无界。取 $k = V(p, q)^{-\frac{1}{2}}$, 代入式(6)和式(7), 可得

$$\begin{aligned}V\left(V(p, q)^{-\frac{2-\alpha}{2}} p, V(p, q)^{-\frac{1}{2}} q\right) &= \\ \left(V(p, q)^{-\frac{1}{2}}\right)^2 V(p, q) &= 1\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(V(p, q)^{-\frac{2-\alpha}{2}} p, V(p, q)^{-\frac{1}{2}} q\right) &= \\ \frac{\dot{V}(p, q)}{V(p, q)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leq \sup_{(p, q) \in \Omega} \dot{V}(p, q)\end{aligned}\quad (9)$$

其中: $\Omega = \left\{ (k^{2-\alpha} p, kq) : (p^T, q^T)^T \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{(0^T, 0^T)^T\} \right\}$, 由式(8)可知, $\Omega = \{(p, q) : V(p, q) = 1\}$ 。由于 V 径向无界, 可知 Ω 为紧集, \dot{V} 在 Ω 内有连续的定义。由于 $(0, 0) \notin \Omega$, 可知

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}(p, q)}{V(p, q)^{\frac{1+\alpha}{2}}} &\leq \sup_{(p, q) \in \bar{\Omega}} \dot{V}(p, q) \\ &= \max_{(p, q) \in \bar{\Omega}} \dot{V}(p, q) = -c\end{aligned}\quad (10)$$

其中: $c > 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \left\{ (p, q) : q = 0, \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right) = \frac{2}{2-\alpha} \right\}$ 。因此有 $\dot{V}(p, q) + c[V(p, q)]^{\frac{1+\alpha}{2}} \leq 0$, 由引理2可知, 除特殊点 $\left\{ (p, q) : q = 0, \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right) = \frac{2}{2-\alpha} \right\}$ 外, 系统(4)是有限时间稳定的, 且稳定时间满足 $T \leq \frac{2}{c(1-\alpha)} V(p(0), q(0))^{\frac{1-\alpha}{2}}$ 。

下面讨论系统处于特殊点 $\left\{ (p, q) : q = 0, \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right) = \frac{2}{2-\alpha} \right\}$ 时的收敛性。此时有

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = -(\tilde{L} + \tilde{B}) \left(\text{sig}(p)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \end{cases}$$

易知该点不是系统(4)的稳定点, 且在该点的邻域 $\left\{ (p, q) : q = \varepsilon, \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T \left(|p|^{\frac{1}{2-\alpha}} \right) = \frac{2}{2-\alpha}, \forall \varepsilon \neq 0 \right\}$ 内, 总有 $\dot{V} < 0$, 且该邻域满足有限时间稳定特性, 因此该特殊点不影响系统的稳定性。

综上所述, 完成了对定理1的证明。

2.2 有限时间阵型控制

本节采用虚拟结构和阶次控制方法^[9], 对航天器编队进行阵型组织。首先将航天器群分为数个阶次, 第1阶次航天器直接接受虚拟领队的信息, 第2阶次航天器则接受第1阶次航天器的信息作为领队信息, 以此类推。

定理2 若表示第 i 级航天器间通信拓扑的图 G_i 为连通图, 且第 i 级中至少有一个航天器能接收到上一级航天器的信息, 则在控制律式(2)的作用下, 每一级航天器都可以实现有限时间跟踪控制。

证明同定理1。

3 仿真结果

3.1 有限时间跟踪

本例侧重体现有限时间跟踪控制效果, 无具体物理意义。航天器间通信拓扑及初始状态如图1所示。仿真参数取 $\alpha = 0.6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ 。由图2及其局部放大图可知, $t = 34.5$ s时, 各航天器均无控制输入, 此时由图3可知, 航天器位置速度成功跟踪领航天器状态。

3.2 阵型控制

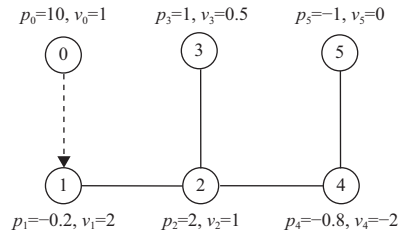


图1 航天器间通信拓扑及各航天器初始状态

Fig. 1 The communication topology and initial states of spacecrafts

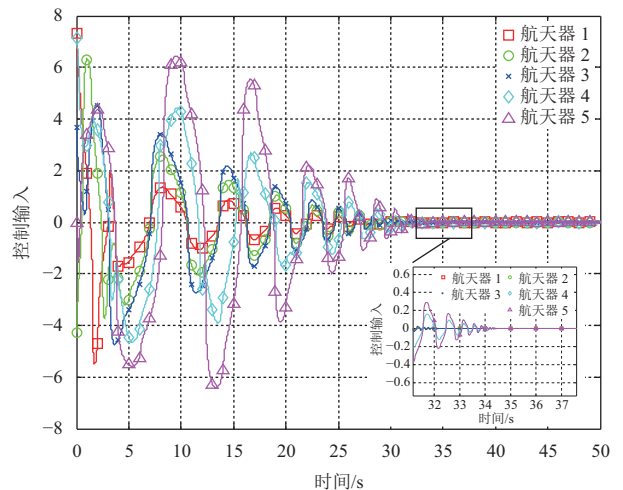
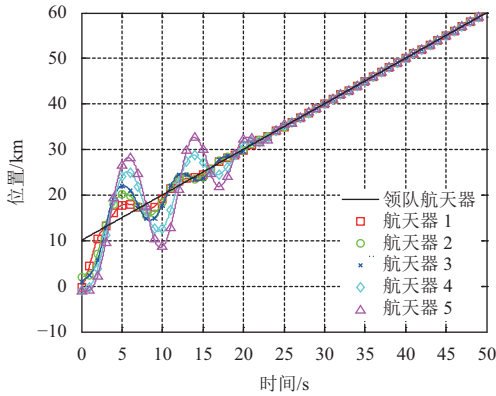
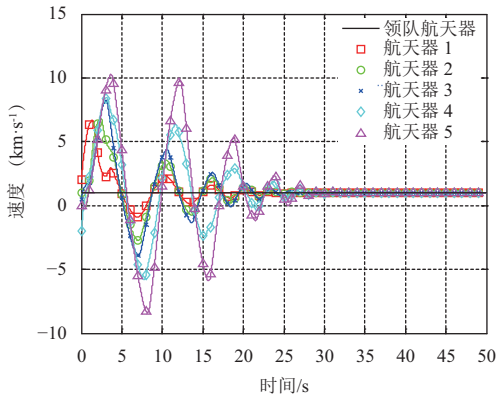


图2 各航天器的控制输入变化曲线

Fig. 2 The control input of spacecraft



(a) 各航天器位置



(b) 各航天器速度

图 3 各航天器的位置和速度变化曲线

Fig. 3 The position and velocity profiles of the spacecraft in the formation

如图 4 所示，示例的阵型控制分为 2 个阶级，第 1 阶级直接接收来自虚拟领队的信息，跟踪虚拟领队形成的虚拟结构；第 2 阶级则有部分航天器接受第 1 阶级的信息，根据分布式原则自组织阵型。

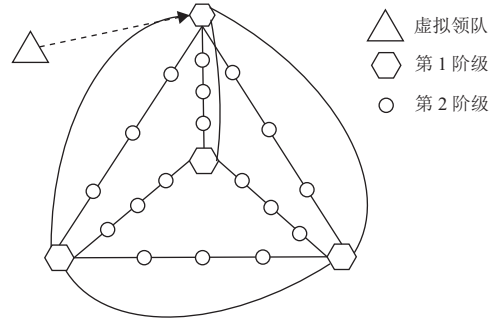


图 4 阶级控制通信拓扑

Fig. 4 Communication topology with hierarchies

在控制参数同上例的情况下，对阵型控制进行三维数值仿真。令虚拟领队形成一个有 4 个顶点的虚拟结构，第 1 阶级中的航天器接受该虚拟结构信息，并实行跟踪；第 2 阶级中的部分航天器接受第 1 阶级航天器的信息，根据固定拓扑，形成 1 个四面体编队，如图 5 所示。其中虚拟领队以 $v_0 = 1 \text{ m/s}$ 的速度匀速运动， $t = 100 \text{ s}$ 时，令虚拟结构以 0.05 rad/s 的角速度进行转动， $t = 200 \text{ s}$ 时停止转动。可见在虚拟结构开始转动的 35 秒内，跟踪轨迹有轻微的震荡过程，与上例中有限时间跟踪的结论相符合。由此验证了该编队算法的有效性。

4 结论

本文将单体航天器动力学模型简化为二阶积分环节，在无向图的基础上，假设每个航天器仅获取相邻航天器的速度位置信息，设计了分布式有限时间跟踪控制算法，并证明了该算法的有效性。在有限时间跟踪控制算法，采用虚拟结构和阶级控制方法，使第 1 阶级航天器接受虚拟领队形成的虚拟结构信息，次级航

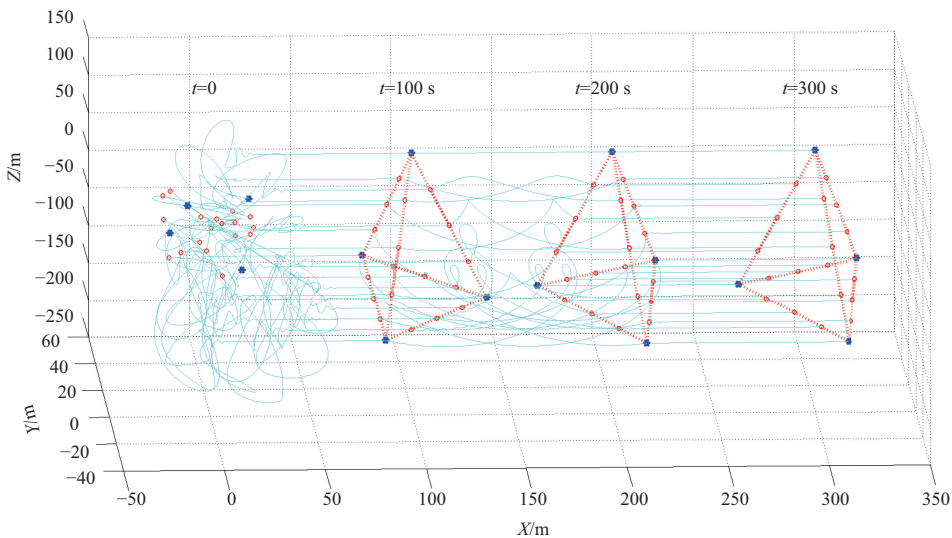


图 5 空间编队阵型示意图

Fig. 5 The formation flying in deep-space environment

天器接受上一级航天器信息,给出了有限时间编队方法,并通过数值仿真,形成了四面体编队,并实现了有限时间队形变换,验证了编队方法。后续研究将以编队中的避撞问题为重点,进一步提高编队算法的实用性。

参 考 文 献

- [1] Lim H C, Bang H. Adaptive control for satellite formation flying under thrust misalignment[J]. *Acta Astronautica*, 2009, 65(1): 112-122.
- [2] De Queiroz M S, Kapila V, Yan Q. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, 23(3): 385-390.
- [3] Slater G L, Byram S M, Williams T W. Collision avoidance for satellites in formation flight[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(5): 1140-1146.
- [4] Ulybyshev Y. Long-term formation keeping of satellite constellation using linear-quadratic controller[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(1): 109-115.
- [5] Sun Y G, Wang L. Consensus problems in networks of agents with double-integrator dynamics and time-varying delays[J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(10): 1937-1945.
- [6] Guo W, Lv J, Chen S, et al. Second-order tracking control for leader-follower multi-agent flocking in directed graphs with switching topology[J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(12): 1051-1058.
- [7] Lu X, Chen S, Lv J. Finite-time tracking for double-integrator multi-agent systems with bounded control input[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(11): 1562-1573.
- [8] Hong Y, Chen G, Bushnell L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks[J]. *Automatica*, 2008, 44(3): 846-850.
- [9] Cong B L, Liu X D, Chen Z. Distributed attitude synchronization of formation flying via consensus-based virtual structure[J]. *Acta Astronautica*, 2011, 68(11): 1973-1986.
- [10] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [11] Ni W, Cheng D. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(3): 209-217.
- [12] Zhou D, Sun S, Teo K L. Guidance laws with finite time convergence[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(6): 1838-1846.

作者简介:

康坤(1990-),男,博士研究生,主要研究方向:协同控制、飞行器制导、动力学建模与仿真等。

通讯地址:北京市中关村南大街5号,北京理工大学宇航学院飞行器控制系(100081)

E-mail: seankang90@gmail.com

Distributed Finite-Time Control Method for Formation Flying

KANG Shen^{1,2}, SHAN Jiayuan^{1,2}

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Key Laboratory of Dynamic and Control of Flight Vehicle, Ministry of Education, Beijing 100081, China)

Abstract: In this paper, a dynamic model of single spacecraft is simulated by a double integrator and the communication topology is assumed fixed. Based on the information exchanges among neighbors, the distributed finite-time control protocol is designed and mathematically verified. Adopt the presented control protocol and combined with virtual structure and hierarchical protocol, the formation algorithm is designed, where in a group spacecraft on a lower level takes orders from spacecraft on a higher level. The numerical simulation is conducted, verifying the effectiveness of the proposed method.

Key words: distributed control; formation flying; finite-time stable; hierarchical control

[责任编辑: 杨晓燕, 英文审校: 朱恬]