三值逻辑的思想和方法

姚从军[1,2]

(1.湖南科技学院　思政部，永州 425100；2.南开大学　哲学系，天津 300071)

摘　要：传统逻辑是二值的,对诸如未来偶然命题使用这种逻辑是无法解决的,这就需要发展起来一种不同于二值逻辑的逻辑,这就是多值逻辑,三值逻辑是其最基本形式。三值逻辑理论沿着不同路线今已得到迅速发展,其应用范围也日益广泛。所有的三值逻辑系统都对二值逻辑的限制有所突破,都在某种意义上显示出"亦此亦彼"的性质,它们之间以及它们与经典二值逻辑之间具有内在的区别和联系,显示了各自独特的思想和构造方法。

关键词：三值逻辑；二值逻辑；逻辑系统；思维规律

中图分类号：B81　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3370(2010)01-0127-05

古典逻辑是二值逻辑,一个命题只有两种取值,非真即假, 非假即真。那么一个命题是否有三个取值,乃至更多,甚至无穷个值呢？回答是肯定的。

三值逻辑的萌芽可以追溯到古希腊时代,例如亚里士多德在《解释篇》第九章中指出："明天将有海战"这类命题既非真,又非假,而是真假都可能。这就涉及到了三值逻辑。但真正的三值逻辑的诞生是近八十多年的事。波兰逻辑学家卢卡西维茨沿着亚里士多德关于 "三值" 的思路、运用形式化的手段进行研究,于 1920 年提出了第一个三值逻辑系统；随后三值逻辑系统乃至其他多值逻辑系统如雨后春笋般出现。

所有的三值逻辑系统都对古典逻辑的限制有所突破,都在某种意义上显示出"亦此亦彼"的性质。然而,它们的具体表现形式却是各不相同的,每一种三值逻辑各有自己的特异性。

一、卢卡西维茨构造三值逻辑系统 L_3 的思想和方法

卢卡西维茨是运用从亚里士多德那里导出的论证而引进他的三值逻辑的。他也是通过对未来事件的分析来发展自己的三值逻辑思想的,他写道；

"我可以无矛盾地假定：我在明年的某个时刻,例如在 12 月 21 日中午,出现在华沙,这在现在的时刻是不能肯定或否定地解决的。因此,我在所说的时间将在华沙,这是可能的但不是必然的。根据这个预先假定,'我在明年 12 月 21 日中午出现在华沙'这句话在现在既不是真的,也不是假的。因为如果它现在是真的, 那么我未来在华沙的出现就一定是必然的,而这与预先假定矛盾；如果它现在是假的,我未来华沙的出现就一定是不可能的, 而这也与预先假定矛盾。因此,所考虑的这句话现在既不真也不假,必有与 0(或假)和 1(或真)不同的第三个值。我们可以用'1/2'来表示这一点：它是'可能的',作为第三个值是与'假'和'真'并行不悖的。这就是产生三值逻辑系统的思路。"[1]

由此可看出,亚氏认为：对于将来偶然陈述,现在不可断定其真假；否则,那就无异于承认"一切都是必然的"(宿命论)。只有将来必然陈述,现在才能判定其真假。针对将来偶然陈述,他引进第三值"可能的"(1/2), 在此基础上建立了三值逻辑乃至一般的多值逻辑。

(一)古典命题逻辑联结词的定义

从二值逻辑关于五个命题联结词的直观的真值表定义,我们进行抽象概括,可以得到与之等值的函数定义。如果"T"、"F"分别用"1"、"0"表示,合式公式 a 的真值用|a|表示,则在二值逻辑中,与五个真值联结词的真值表定义等价的函数定义如下：

(1)$|\neg p|=1-|p|$；(2)$|p\vee q|=\max(|p|,|q|)$；(3)$|p\wedge q|=\min(|p|,|q|)$；(4)$|p\rightarrow q|=\min(1,1-|p|+|q|)$；(5)$|p\leftrightarrow q|=|p\rightarrow q|\wedge|q\rightarrow p|=\min(|p\rightarrow q|,|q\rightarrow p|)=\min[\min(1,1-|p|+|q|),\min(1,1-|q|+|p|)]$(max 表示取最大值,min 表示取最小值)。

这个函数定义对卢氏建立三值逻辑命题联结词的真值表定义提供了理论基础。

(二)卢氏三值逻辑命题联结词的定义

卢氏完全继承了二值逻辑五个命题联结词的函数定义,先列出命题变项的各种真值组合情况表,然后根据上述函数定义,求出在每种真值组合下,五种基本命题形式的真值,最后把真值填入此表,于是就得到卢氏三值逻辑对五个命题联结词的真值表定义。

收稿日期：2009-08-23
作者简介：姚从军(1971—),男,湖南科技学院思政部讲师,南开大学哲学系博士研究生。E-mail: yaocongjun@126.com

在此用 1、1/2、0 分别代表 T、I、F。先定义“¬”。用“¬”的函数定义求出在|p|的各种取值情况下,|¬p|的取值,运用|¬p|=1-|p|知:当|p|=1 时,1-|p| =1-1=0;当|p|=1/2 时,1-|p|=1-1/2=1/2;当|p|=0 时,1-|p|=1-0=1;最后将这三值分别填入表中对应位置,这样就得出卢氏三值逻辑联结词“¬”的真值表定义(表 1)。

表 1 卢氏三值逻辑联结词“¬”的真值表定义

p	¬p
1	0
1/2	1/2
0	1

同样的方式, 借助于二值逻辑其它四个命题联结词的函数定义, 可求出它们在卢氏三值逻辑中的真值表定义。于是,卢氏构造三值逻辑命题联结词的真值表定义的基本原则是: 严格遵循二值逻辑命题联结词的函数定义。

(三)L_3 系统的构建

在 L_3 中, 由于 p→q 与¬p∨q 并非总是等值的, 故不可用“∨”来定义“→”,也就是说,不能用“¬”和“∨”作初始概念。

但在 L_3 中,可以证明 p∧q 与¬(¬p∨¬q)是等值的,p∨q 与(p→q)→q 也是等值的。因此,在 L_3 中可以用否定词“¬”和蕴涵词“→”作为初始概念来定义其他三个命题联结词:

(1)p∨q=def [(p→q)→q];

(2)p∧q=def [¬(¬p∨¬q)];

(3)p⟷q=def [(p→q)∧(q→p)](其中“def”表示定义)。

沿着这一思路,1931 年, 卢卡西维茨的学生瓦基斯伯格初步完成了 L_3 形式公理系统,其系统可描述如下[2]:

1.初始概念

(1)命题变元:p、q、r…;(2)否定词:¬;(3)蕴涵词:→;(4)技术性括号:),(。

2.从属概念(略)

3.形成规则(同采用相同初始概念的经典命题逻辑系统的形成规则)

4.公理(模式)

A_1:p→(q→p); A_2:(p→q)→((q→r)→(p→r))

A_3:(¬p→¬q)→(q→p_; A_4:((p→¬p)→p)→p

5.变形规则(同经典命题逻辑的相应规则)。

二、鲍契瓦尔构造三值逻辑系统 B_3 的思想和方法

鲍契瓦尔的三值逻辑系统 B_3 是为了处理语义悖论而发展起来的。语义悖论是出现在思想、语言中,涉及意义和真假的悖论。其中最典型的是说谎者悖论。当一个人说:“我正在说谎”,人们无论假定这个语句是真还是假,经过一系列无懈可击的推理,都将人们带到自相矛盾的境地。德国学者鲍契瓦尔提出,可以用建立三值逻辑的办法来解决语义悖论。他认为表述悖论的语句既不真也不假, 必须被赋以第三个值——“悖谬”的或“无意义”。他所构造的三值逻辑旨在避免悖论。第三值被解释为“悖”或“无意义”,悖值的否定仍是悖值,因此悖值具有“亦此亦彼”性质。其否定词的定义同于 L_3 的否定词定义。鲍契瓦尔的构造原则是:如果复合句某一部分取悖值,则整句也取悖值。鲍契瓦尔三值逻辑系统 B_3 的命题联结词真值表定义如表 2、表 3 所示。

表 2 B_3 中¬定义

p	¬p
T	F
I	I
F	T

表 3 B_3 中∧、∨、→、↔的定义

p	q	p∨q	p∧q	p→q	p↔q
T	T	T	T	T	T
T	I	I	I	I	I
T	F	F	T	F	F
I	T	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I
I	F	I	I	I	I
F	T	F	T	T	F
F	I	I	I	I	I
F	F	F	F	T	T

值得注意,由于 B_3 系统中第三值的特殊含义及其相应的构造原则,它的真值表出现了特异性,这主要是:

(1)当合取式中一项取“I”值,另一项取“F”值时,整个合取式取悖值(I),即为当|p|=I,|q|=F 时,|p∧q|=I。形象地说,鲍氏三值逻辑中的第三值——悖谬值具有类似传染病的特性, 它很容易在整句中扩散;

(2)悖谬值的“传染”的特性还使得蕴涵式将在以下几种情况下取悖谬值(I):

1)当|p|=|q|=I 时,|p→q|=I;

2)当|p|=I,|q|=T 时,|p→q|=I;

3)当|p|=F,|q|=I 时,|p→q|=I。

在 B_3 中,我们仍可以取否定词和析取词(或者否定词和合取词)为基始联结词来定义其它联结词,但不能以否定词和蕴涵词为基始联结词来定义其他联结词。B_3 也可以看作是对于二值逻辑的一种限制,

并且具有“函项的不完备性”性质。

这两种三值逻辑是 “规范的”三值逻辑,因为它们的永真式是标准的二值逻辑中的永真式,因此,这些理论都可以看成是对于二值逻辑的限制。也可以建立各种非规范的三值逻辑理论。显然，就后者而言,就未必是对标准逻辑的限制了。

三、莱欣巴哈构造三值逻辑系统 R_3 思想和方法

随着量子理论的不断发展，人们把光的波动性和粒子性统一起来，确认光具有波粒二象性。戴维逊·革末的实验证明了微粒子都具有波粒二象性,有力证明了“亦此亦彼”现象是客观存在的。微观粒子所显示的特有的内在矛盾使习惯于按“非此即彼”模式思考的物理学家陷入认识上的困境，莱欣巴哈的解救办法是引进非古典的三值逻辑。莱欣巴哈论证的基本点在于：如果用古典二值逻辑去解释量子实验特有的“测不准”或“不确定”现象,必然会导致“因果反常”;然而用三值逻辑解释量子实验可避免这些“因果反常”,又不危及量子力学或古典物理学。

为了刻画量子现象特有的不确定性，莱欣巴哈采取了决定性的步骤,他在真假之间引进了“不确定值”,相应地扩充了基本真值表,修正并扩充了基本联结词,如表 4 所示。

表 4　R_3 中否定词的定义

A	~A	-A	A′	(a)否定词表
T	I	F	I	~A 循环否定
I	F	I	T	-A 直接否定
F	T	T	T	A′完全否定

莱欣巴哈定义了三种否定,他是这样来介绍的：“最方便的做法是把三个真值 T、I、F 按次序排列起来,从最高值 T 排到最低值 F。……循环否定是把一个真值改为下一个真值，但最低值的情形除外,这时,它被改为最高值,因此,我们把表式的~A 读作次于 A。直接否定是 T 和 F 对调,而 I 保持不变。它相当于算术中负号的作用，这时真值 I 可被解释为数字 0,因此我们把表式-A 称为 A 之负,读作负 A。完全否定是把真值改为其余两个当中最高者,A′读作非 A。

“析取运算和合取运算相当于二值逻辑中的同名运算。……”

“构成蕴涵式的方法有许多种,我们只用到三种蕴涵式,它们都定义在表 AB(这里表 5)中。表中第一种蕴涵式是三一三运算,这就是说,从基本命题的三个真值可得出运算式有三个真值。我们把它叫做标准蕴涵式。表中第二种蕴涵式是三一二运算,因为在该栏中只有真值 T 和 F，因此我们把它叫做二中择一蕴涵式。表中第三种蕴涵式称为准蕴涵式,因为它不满足通常对蕴涵式的全部要求。”[4]另外他还定义了两种等值联结词,即标准等值(≡)和二者择一等值(↔)。

表 5　R_3 中析取、合取、蕴涵和等值的定义

A	B	析取	合取	蕴涵			等值	
		A∨B	A·B	A⊂B	A→B	A⇒B	A≡B	A↔B
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	I	T	I	I	F	I	I	F
T	F	T	F	F	F	F	F	F
I	F	T	I	T	T	I	I	F
I	F	I	I	T	T	I	T	T
I	F	I	F	I	T	I	I	F
F	T	T	F	T	T	I	F	F
F	I	I	F	T	T	I	I	F
F	F	F	F	T	T	I	T	T

从这两个定义联结词的真值表中，我们可以看出:有和二值逻辑相近的定义,如直接否定(-)、析取词(∨)、合取词(·)、标准蕴涵(⊂),二中择一蕴涵(→)以及两个等价词的定义;在命题变项只取 T、F 值时，它们各自的取值情况与二值逻辑中相应的联结词取值情况是完全一样的。如果对它们进行不同的组合,再加上古典 T,F 值的解释和永真式的定义,可得到 “规范的”三值逻辑。相反,如果采取了循环否定(~)、完全否定(′)、准蕴式(⇒)中的任何一种定义,再加上其他联结词的定义,其结果将得到“非规范的”三值逻辑,因为它们在 T、F 中运算就不同于经典逻辑相应联结词的运算。故赖欣巴哈的 R_3 系统具有“规范的”和“非规范的”两重性质,它是从“规范的”的三值逻辑向“非规范的”三值逻辑的过渡形式,因此它不仅仅是对三值逻辑的一种限制。但经典二值逻辑仍可以看作三值逻辑的“特例”,因根据这个新真值表可以提取出“规范的”三值逻辑,而经典二值逻辑是“规范的”的三值逻辑的“特例”。

莱欣巴哈的三值逻辑系统 R_3 是适应量子力学的需要发展起来的。在量子力学中,简单的“非此即彼”根本行不通。单个光子尽管在能量上不能再分,但它同时能通过双缝。这里需要“亦此亦彼”模式,而且“亦此亦彼”在物理上有确切的含义。在新逻辑中,最能体现“亦此亦彼”性质的是三种否定词:(1)在直接否定中,不确定值同时又是自己的否定;(2)在循环否定中,不确定值一方面是作为“真”的否定而出现(这一点像经典逻辑中的“假”),另一方面它的否定却不是 “真” 而是 “假”(这一点又像经逻辑中的“真”)。因此不确定值部分像真又部分像假;(3)在完

全否定中,“真”一方面作为“假”的否定而出现,另一方面又是作为“不确定”值的否定而出现的。

四、波斯特构造三值逻辑系统 P_3 的思想和方法

波斯特出于纯形式的考虑,不满于古典二值逻辑“非此即彼”的语义学要求,也不满足于某些古典定理及其推演,因而建立了可数任意多值的逻辑系统。由于波斯特杰出的工作,多值逻辑从三值拓广为可数无穷多值。我们只介绍其三值逻辑系统 P3,如果用 T、I、F 分别代表波斯特“1”、“2”、“3”三个真值的话,则 P_3 的命题联结词真值表定义如表 6、表 7 所示。

表 6　P_3 中¬定义

p	¬p
T	I
I	F
F	T

表 7　P_3 中∧、∨、→、¬的定义

p	q	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
T	T	F	T	T	F
T	I	F	T	I	F
T	F	I	T	I	F
I	T	F	T	T	F
I	I	T	I	I	T
I	F	I	I	F	I
F	T	I	T	T	F
F	I	I	I	T	I
F	F	I	F	T	F

波斯特的否定词定义采取了赖氏的循环否定法,P_3 中关于析取词的函数定义与 L_3 关于析取词的函数定义相同:析取式中的真值取它的析取支的真值性最大的一个。然后,Post 以否定词和析取词为初始概念来定义其它几个命题联结词

p∧q=def(¬(¬p∨¬q));p→q=def(¬p∨q); p↔q=def((p→q)∧(q→p))

在 P_3 中存在这样的重言式:p∨¬p∨¬¬p, 我认为它就是思维规律排中律在 P_3 系统中的特定表现形式。

五、构造三值逻辑的新思想及方法

如果仅从纯形式的角度考虑, 我认为可用多种方法构建三值逻辑命题联结词定义的真值表。

方法之一。当命题变元取值后,复合公式的值无非是T、I、F 这三种真值的不同组合。以否定词为例:|p|可取三种值,即有三种真值组合,对于每一种真值组合,|¬p|可取三值,这样关于¬p 的真值函项 f(¬p)就有 3^3=27 种,它们分别用¬p_1、¬p_2……¬p_{27} 表示如表 8 所示。

这 27 个函项式中,有的明显违反直观:若|p|=T 时,|¬p|=T;或者|p|=F 时,|¬p|=F,这样的“¬”完全失去了任何否定意味,应排除涉及这些取值的真值组合, 其他的真值组合我认为可拿来作为否定的定义,和其他命题联结词定义结合在一起,构造不同的三值逻辑系统。证明公理的独立性,就用到这种纯形式构造法。

方法之二。我们知道三值逻辑有三个真值,那么从直观上讲,当否定一个命题取一个值,则命题就有取另外两种真值的可能, 这样我认为更合人们的习惯思维,如表 9 所示。

表 8　否定的新定义 1

p	¬p_1	¬p_2	¬p_3	¬p_4	¬p_5	¬p_6	¬p_7	¬p_8	¬p_9	¬p_{10}	¬p_{11}	¬p_{12}	¬p_{13}
T	T	I	F	T	T	T	I	I	I	T	T	T	F
I	T	I	F	T	I	I	I	T	T	T	F	F	F
F	T	I	F	I	T	I	T	I	T	F	T	F	T

¬p_{14}	¬p_{15}	¬p_{16}	¬p_{17}	¬p_{18}	¬p_{19}	¬p_{20}	¬p_{21}	¬p_{22}	¬p_{23}	¬p_{24}	¬p_{25}	¬p_{26}	¬p_{27}
F	F	I	I	I	F	F	F	T	T	I	I	F	F
T	T	I	F	F	F	I	I	I	F	T	F	T	I
F	T	F	I	F	I	F	I	F	I	F	T	I	

表 9　否定的新定义 2

p	¬p
T	I∨F
I	T∨F
F	T∨I

这里的“∨”不可按经典逻辑命题联结词的函数定义来定义,即取真理性大之值,否则,这种特殊的定义方法将失去意义。

方法之三。我们知道在 L_3 中,同一律可用 p→p 刻画,但排中律、矛盾律在 L_3 中未找到刻画的方法;在 P_3 中,排中律可用 p∨¬p∨¬¬p 刻画,同一律未得到刻画,说明二者各有所长,可以互补。进一步分析发现,L_3 的特长来源于“→”的定义,P_3 的特长来源于

“¬”、“∨”的定义,主要是“¬”的定义,又因为 L_3 与 P_3 对“∨”的函数定义完全相同,我们何不扬二者之长,避二者之短,将 P_3 中的“¬”的定义嫁接在 L3 中其余联结词的定义之上呢？这样结合的优点大于它们各自优点的机械加：不仅 p→p、p∨¬p∨¬¬p 是它的永真式,即同一律和排中律得到刻画;¬(p∧¬p∧¬¬p)也是它的永真式,即矛盾律也得到部分刻画。

六、回顾与展望

从多值逻辑的产生到 20 世纪 60 年代末，多值逻辑的研究主要是着眼于纯理论的兴趣，出现了许多多值逻辑的理论。这个时期虽然也有多值逻辑的运用研究，但主要集中于多值逻辑在其他纯理论中的运用,比如将多值逻辑应用于其他逻辑分支,如直觉主义逻辑、模态逻辑和模糊逻辑等等。20 世纪 70 年代以后,多值逻辑研究再度引起广泛的重视,一个重要原因就是由于计算机科学技术的迅速发展,带动了多值逻辑在计算机科学及其相关科学，如集成电路等等中的运用。

多值逻辑不仅是一个新的逻辑分支，也是一门“尚未完成”的学科。鉴于多值逻辑的有关理论得到广泛的应用,因此,进一步研究它、完善它,就是一个紧迫的任务;同时,多值逻辑又是一个重要的逻辑部门,因为它涉及许多哲学问题,例如,将来可能性、辩证法、量子理论中的非决定论和相对论等等。因此 ,加强对多值逻辑理论的研究是非常有意义的。

参考文献：

[1] 威廉·涅尔,玛莎·涅尔. 逻辑学的发展[M]. 北京：商务印书馆,1985:709.

[2] 郑毓信. 现代逻辑的发展[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1989: 214.

[3] 桂起权,罗毅. 多值逻辑的起源、特性及其给辩证逻辑的启示[J]. 内蒙古师范大学学报,1987,30(2):30-38.

[4] 赖欣巴哈. 量子力学的哲学基础[M]. 候德彭,译. 北京:商务印书馆,1965:199.

The Ideas and Methods of the Three-valued Logic

YAO Cong-jun[1,2]

(1.Department of Politics Hunan University of Sicence and Engineering, Yongzhou 425100;

2.Department of philosophy, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract: Traditional logic is binary, and for the future, such as accidental proposition, this logic can not solve, which is different from the need to develop logic of binary logic, which is multi-valued logic, the three-valued logic is the most basic form. Today, three-valued logic theory along the different routes has been developed rapidly, its increasingly wide range of applications. Three-valued logic systems and their relationship with the classical two-valued logic of the distinction between internal and contacts show their unique ideas and construction methods.

Key words: three-valued logic; two-valued logic; logic system; thinking law

[责任编辑:孟青]